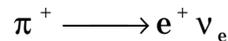


2. Messmethoden

2.1 Allgemeine Betrachtungen

Um das Verzweungsverhältnis R (siehe (1) im Kap. 1) zu bestimmen, müssen die Positronen aus dem Zerfall



(Anzahl Positronen aus diesem Zerfall = $N_{\pi e}$) in der Anwesenheit der 104 mal häufigeren Positronen, welche aus der $\pi - \mu - e$ Zerfallskette:



stammen, ausgezählt werden (Anzahl Positronen aus diesem Zerfall = $N_{\mu e}$). Um dies prinzipiell zu bewerkstelligen müssen hier noch Bemerkungen bzgl. der Energien der Zerfallsprodukte (letztlich der Positronen) gemacht werden.

Diese Energiewerte berechnen sich für jene Positronen, die aus dem ersten Zerfallskanal stammen wie folgt (es handelt sich hier um einen Zweikörperzerfall und somit um eine Emission monoenergetischer Teilchen):

$$E \approx \frac{m_\pi^2 + m_e^2}{2m_\pi} \approx \frac{m_\pi}{2} = 69.8 \text{ MeV} \quad (1)$$

Im zweiten Kanal mit anschließendem Zerfall der Myonen erhalten wir eine maximale Positronenenergie aus der folgenden Formel (da es sich hierbei um einen Dreikörperzerfall handelt, ist die Positronenenergie natürlich im Bereich $0-E_{\max}$ verteilt):

$$E_{\max} \approx \frac{m_\mu}{2} = 52.8 \text{ MeV} \quad (2)$$

Diese maximale Zerfallsenergie liegt nur bei der speziellen Zerfallsanordnung aus Fig.1 vor:

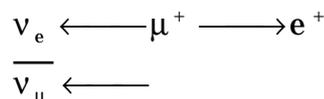


Fig.2.1.1: Situation, in welcher das Positron die höchste Energie erhält.

Es ist nun prinzipiell möglich die Positronen, welche aus dem Pionzerfall entstehen, aufgrund ihrer Energien dem jeweiligen Zerfallskanal ($A_{\pi e}$ bzw. $A_{\mu e}$) zuzuordnen und aus dieser Abzählung das Verzweungsverhältnis zu bestimmen:

$$R = \frac{A_{\pi e}}{A_{\pi \mu e}} \quad (3)$$

Praktisch ist dies so einfach nicht möglich, da die geforderte Energieunterscheidung durch die Energieauflösung des verwendeten Kalorimeters bestimmt wird. Die Energieauflösungsfunktion des verwendeten NaI(Tl)-Detektors ist in Fig. 5.5.3 wiedergegeben und zeigt einen weit ausreichenden Kurvenabschnitt im niederenergetischen Teil. Dies bewirkt, dass die wenigen direkten Zerfälle, von den reichlich auftretenden μ -Positronen nicht mehr zu trennen sind. Eine weitere Einschränkung tritt auf im tieferen Energiebereich des Detektors. Dort ist die Detektionswahrscheinlichkeit kleiner als bei höheren Energien, was zu einer verfälschten Anzahl von μ -Positronen führen würde. Die erste Einschränkung des Detektors umgehen wir indem wir die Auswertung in Anlehnung an Di Capua et al. [DiC64] durchführen und die Zweite indem wir weitere theoretische Vorkenntnisse bezüglich des Energiespektrums der μ -Positronen verwenden.

2.2 Der μ -Zerfall und das μ -Positronen-Energiespektrum (Michelspektrum)

Der dem Myonzerfall zugrunde liegende Prozess ist in Fig. 2.2 als Feynmangraph dargestellt.

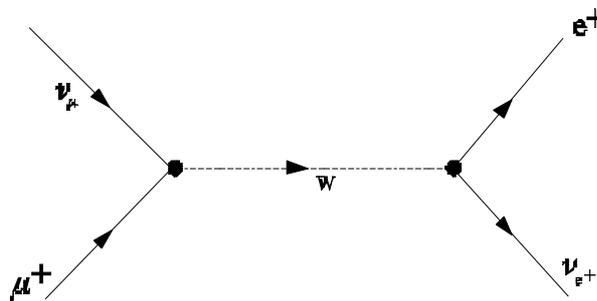


Fig. 2.2.1: Myonzerfall

Der Zerfall des positiv geladenen Myons spielt in unserem Experiment eine zentrale Rolle, stammen doch die meisten der detektierten Positronen aus diesem Prozess. Die Energieverteilung des Positrons im Myonzerfall erhält man aus der Fermi Theorie:

$$\frac{d\Gamma}{dE'} = \frac{G^2}{12\pi^3} m^2 E'^2 \left(3 - \frac{4E'}{m} \right) \quad (4)$$

Wichtig dabei ist, dass die maximal mögliche Energie der Positronen aus dem Myonzerfall $E_{\max} = 52.8$ MeV beträgt. Dies führt zu einem abrupten Abfall des Spektrums bei genau dieser Energie. Der Myonzerfall

$$\mu^- (p) \rightarrow e^- (p') + \bar{\nu}_e (k') + \nu_\mu (k) \quad (5)$$

ist die Modellreaktion für alle schwachen Zerfälle. Die Viererimpulse der Teilchen sind in Fig. 2.2.1 definiert.

Die invariante Amplitude für den Myonzerfall ist

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}(k) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p) \right] \cdot \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(k') \right] \quad (6)$$

wobei die Spinoren mit den Impulsen der Teilchen bezeichnet sind. Das auslaufende ν_e ist mit $v(k')$ beschrieben.

Die Myonzerfallsrate erhält man nun mit der Formel

$$d\Gamma = \frac{1}{2E} \overline{|M|^2} dQ \quad (7)$$

wobei der invariante Phasenraum

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p' - k - k') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{d^3 k'}{2\omega'} \theta(E - E' - \omega') \delta\left((p - p' - k')^2\right) \end{aligned} \quad (8)$$

ist mit $p^0 \dots E$, $k^0 \dots \omega$ und so weiter. Dabei haben wir (um die letzte Zeile zu erreichen) über $d^3 k$ integriert und benutzt, dass

$$\int \frac{d^3 k}{2\omega} = \int d^4 k \theta(\omega) \delta(k^2) \quad (9)$$

Indem wir (6) benutzen, finden wir, dass die Spin-Durchschnitts-Wahrscheinlichkeit gegeben ist durch

$$\overline{|M|^2} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} |M|^2 = 64 G^2 (k \cdot p')(k' \cdot p) \quad (10)$$

wobei $p = p' + k' + k$ wegen der $d^4 k$ Integration, welche in (9) durchgeführt wurde. Weil $m_\mu \gg 200 m_e$ können wir die Masse des Elektrons problemlos vernachlässigen. Man beachte, dass

$$2(k \cdot p')(k' \cdot p) = (p - k')^2 (k' \cdot p) = (m^2 - 2m\omega') m\omega' \quad (11)$$

und fasst alle Resultate zusammen: Die Zerfallsrate im Myon ist

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{G^2}{2m\pi^5} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{d^3 k'}{2\omega'} m\omega' (m^2 - 2m\omega') \times \\ &\quad \times \delta(m^2 - 2mE' - 2m\omega' + 2E'\omega' (1 - \cos\theta)) \end{aligned} \quad (12)$$

und wir können d^3p' d^3k' ersetzen durch

$$4 \pi E'^2 dE' 2 \pi \omega'^2 d\omega' d \cos \theta \quad (13)$$

Jetzt benutzen wir die Tatsache, dass

$$\delta(\dots + 2 E' \omega' \cos \theta) = \frac{1}{2 E' \omega'} \delta(\dots - \cos \theta) \quad (14)$$

um die Integration über den Öffnungswinkel θ zwischen dem emittierten e und dem ν_e durchzuführen und erhalten

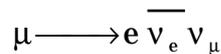
$$d\Gamma = \frac{G^2}{2 \pi^3} dE' d\omega' m \omega' (m - 2 \omega') \quad (15)$$

Die Integration der δ -Funktion führt zu folgenden Restriktionen der Energien E' und ω' welche von der Tatsache stammen, dass $-1 \leq \cos \theta \leq 1$:

$$\frac{1}{2} m - E' \leq \omega' \leq \frac{1}{2} m \quad (16)$$

$$0 \leq E' \leq \frac{1}{2} m \quad (17)$$

Diese Grenzen sind einfach zu verstehen, wenn man die Grenzen betrachtet unter welchen der 3-Körper-Zerfall



eigentlich ein 2-Körper-Zerfall wird. Zum Beispiel, wenn die Elektronen Energie E' verschwindet: (15) führt zu

$$\omega' = \frac{m}{2}$$

was auch erwartet wird, denn die zwei Neutrinos teilen sich die Ruheenergie des Myons zu gleichen Teilen auf.

Um das Energiespektrum des emittierten Elektrons zu erhalten, integrieren wir (14) über ω' :

$$\frac{d\Gamma}{dE'} = \frac{mG^2}{2 \pi^3} \int_{\frac{1}{2}m-E'}^{\frac{1}{2}m} d\omega' \omega' (m - 2 \omega') = \frac{G^2}{12 \pi^3} m^2 E'^2 \left(3 - \frac{4 E'}{m} \right) \quad (18)$$

Diese Voraussage befindet sich in perfekter Übereinstimmung mit dem beobachteten Elektron-Spektrum. Dieses Energiespektrum wird auch als Michelspektrum bezeichnet.

Zum Schluss berechnen wir die Myonzerfallsrate

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\tau} = \int_0^{\frac{m}{2}} dE' \frac{d\Gamma}{dE'} = \frac{G^2 m^5}{192 \pi^3} \quad (19)$$

Setzen wir die gemessene Myonlebensdauer $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s ein, können wir die Fermi-Kopplung G ausrechnen. Wir finden:

$$G \approx \frac{10^{-5}}{m_N^2}$$

2.3 Verzweigungsverhältnis unter Berücksichtigung der Zeitskala

Wie in Kap. 2.1 bereits erwähnt, ist es nicht möglich, wenn wir uns nur auf die "Energieunterscheidung" beschränken, eine Auswertung mit der gewünschten Genauigkeit zu kriegen.

Wir wollen nun noch auf die augenfälligen Unterschiede bzgl. der Zerfallszeiten t_π (= 26ns) des Pions und t_μ (= 2.2 μ s) des Myons hinweisen.

Sobald ein Pion gestoppt hat ist also die Wahrscheinlichkeit nach kurzer Zeit ein Positron aus dem direkten Pionzerfall mit einer Energie von 70MeV zu finden viel grösser als zu späteren Zeiten. Die durch den viel stärker gewichteten zweiten Kanal erzeugten Myonen zerfallen ihrerseits auf einer grösseren Zeitskala.

Diese Zeitphänomene wurden von Di Capua et al. [DiC64] zur Bestimmung des Verzweigungsverhältnisses mitverwendet. Zu diesem Zweck wurden zwei Zeitfenster eingerichtet, die gleichlang (in unserem Fall 40ns) aber um einige Pionlebensdauern (in unserem Fall 136ns) verschoben waren. Das erste Zeitfenster wurde kurz nach der Detektion des Pions im Target geöffnet und die Positronen welche in diesem Zeitrahmen eintrafen nach Energie und Zeit registriert. In diesem Zeitfenster sind die Positronen aus dem Pionzerfall häufiger und können aus dem Gros der Myon-Positronen herausgelesen werden. Es ist hierbei wichtig die Energieauflösung des Detektors zu kennen, da der theoretische δ -Peak hier gerade die empirische Auflösungsfunktion ergibt. Die Auszählung in diesem ersten Zeitfenster ergab die Werte $N_{\pi e}$ (für die Anzahl direkter Pion-Positronen) bzw. $N_{\mu e}$ (für die Anzahl Pion-Myon-Positronen). Im zweiten Zeitfenster wurden einfach alle Ereignisse registriert, was den Wert D ergab. Um die π - μ -e Ereignisse auszuzählen ist es von grösster Wichtigkeit die theoretische Energieverteilung (Michelspektrum) zu kennen, da der Detektor nur bei hohen Energien optimal funktioniert (siehe Kap. 5).

Das Verzweigungsverhältnis kann nun wie folgt ausgedrückt werden [DiC64]:

$$R = \frac{\lambda_\mu}{\lambda_\pi - \lambda_\mu} \cdot \frac{N_{\pi e} \left\{ 1 - e^{-[(\lambda_\pi - \lambda_\mu) t_s]} \right\}}{D e^{\lambda_\mu t_s} - N_{\mu e}} \quad (20)$$

Dabei sind

$$\lambda_{\pi} = \frac{1}{\tau_{\pi}} \quad \lambda_{\mu} = \frac{1}{\tau_{\mu}}$$

die Pion- bzw. Myonzerfallsrate.

Somit gelingt es, die geringe Anzahl der direkten Pion-Positronenzerfälle herauszuzählen und noch andere Vorteile auszunützen, denn diese Methode ist unabhängig von verschiedenen möglichen Fehlerquellen. Insbesondere von der Verschiebung des ersten Zeitfensters vom Zeitpunkt des Pion-Stops, dem Raumwinkel des Positronendetektors, der absoluten Breite der beiden Zeitfenster (solange sie gleich lang sind) und von Myonen im Strahl (aus den Zerfällen der beschleunigten Pionen). Die Herleitung der Formel befindet sich im Anhang A.

3. Apparatur

3.1 Ringzyklotron

Wir wollen uns bei den Betrachtungen auf die Gegebenheiten des Ringzyklotrons am PSI in Villigen AG beschränken. Wesentliche Elemente des Zyklotrons am PSI sind 8 Sektormagnete und 4 RF-Beschleunigungskavitäten.

Die positiv geladenen Protonen werden durch die elektrischen Felder in den Kavitäten beschleunigt. Die gekrümmten Bahnkurven der Teilchen werden durch die Lorentzkraft

$$F_L = Q \cdot v \cdot B$$

Das Proton wird in einen Orbit im Zentrum des Rings injiziert (durch den Injektor 2 mit einer Energie von 72MeV). Es beschreibt unter dem Einfluss der Lorentzkraft eine halbkreisförmige Bahn. Bei jedem Durchgang durch ein elektrisches Feld in einer der vier Kavitäten, wird es durch eine Wechselfspannung mit geeigneter Frequenz weiter beschleunigt, so dass seine Geschwindigkeit und der Bahnradius wachsen. Schliesslich werden die beschleunigten Protonen mit einem Ablenkkondensator herausgelenkt und aus dem Ring emittiert.

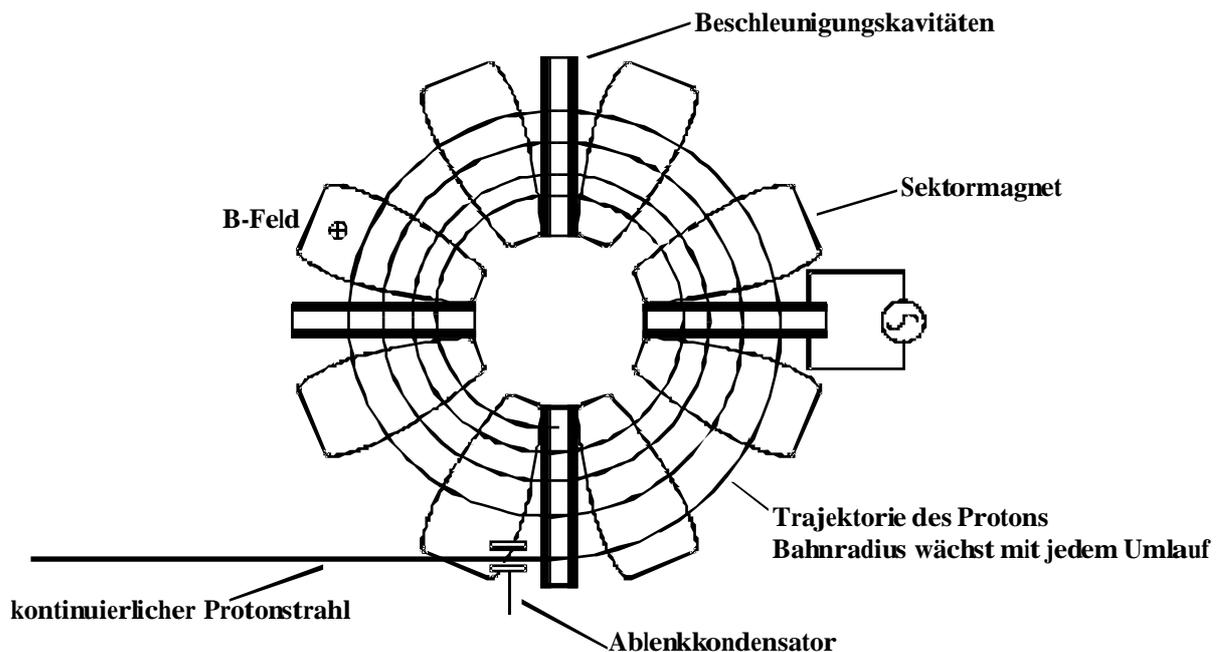


Fig. 3.1.1: PSI Ringzyklotron

Aus den beiden Gleichungen

$$QvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$v = \omega r$$

ergibt sich

$$QvB = m\omega v \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{QB}{m} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2\pi m}{QB}$$

Die Kreisfrequenz ω bzw. die Umlaufzeit T ist also sowohl vom Bahnradius r als auch von der Teilchengeschwindigkeit v unabhängig. Bei hoher Teilchengeschwindigkeit v ist die Masse m wegen der relativistischen Massenunveränderlichkeit nicht mehr konstant; sie nimmt mit wachsender Geschwindigkeit zu. Der Effekt wirkt sich besonders stark für Teilchen aus, die sich nahezu mit der Lichtgeschwindigkeit bewegen. Damit ändert sich die Kreisfrequenz ω . Man kann aus diesem Grunde Protonen mit einem konventionellen Zyklotron nur auf eine Energie von etwa 20MeV beschleunigen. Die erreichbare Energie der Teilchen kann erheblich gesteigert werden, wenn man die Frequenz der Wechselspannung laufend im richtigen Masse verkleinert, wie dies auch im Ringzyklotron am PSI geschieht. Man spricht von einem Synchrozyklotron.

Eigenschaften des "RING" Proton Beam (PSI)

• Injektionsenergie	72MeV
• Extraktionsenergie	590MeV
• Energie-Streuung (FWHM)	ca. 1.5%
• Beamstrom	1.5mA DC
• Beschleunigerfrequenz	50.63MHz
• Zeit zwischen zwei Pulsen	19.7ns
• Pulsbreite	ca. 1ns
• Anzahl Umläufe des Protons im Ring	mehr als 220
• Energiezuwachs pro Umlauf	ca. 2MeV

3.2 Strahlfokussierung

Beim Strahltransport von Vorbeschleunigern zu Hauptbeschleunigern und zu den Experimenten (Injektion und Extraktion) ist eine gute Fokussierung von grosser Bedeutung. Bei Hochenergiebeschleunigern benutzt man zur Strahlfokussierung Quadrupolmagnete (magnetische Linse). Das Feld eines Quadrupolmagneten fokussiert geladene Teilchen in einer Ebene auf seine Mittelachse, während sie in der Ebene senkrecht dazu defokussiert werden. Eine Fokussierung in beiden Ebenen erreicht man mit einem zweiten Quadrupolmagneten, dessen Pole gegenüber dem ersten um 90° gedreht sind. Dieses Prinzip der starken Fokussierung hat sein Analogon in der Optik in der Kombination von dünner Streu- und Sammellinse, die immer fokussierend wirkt.

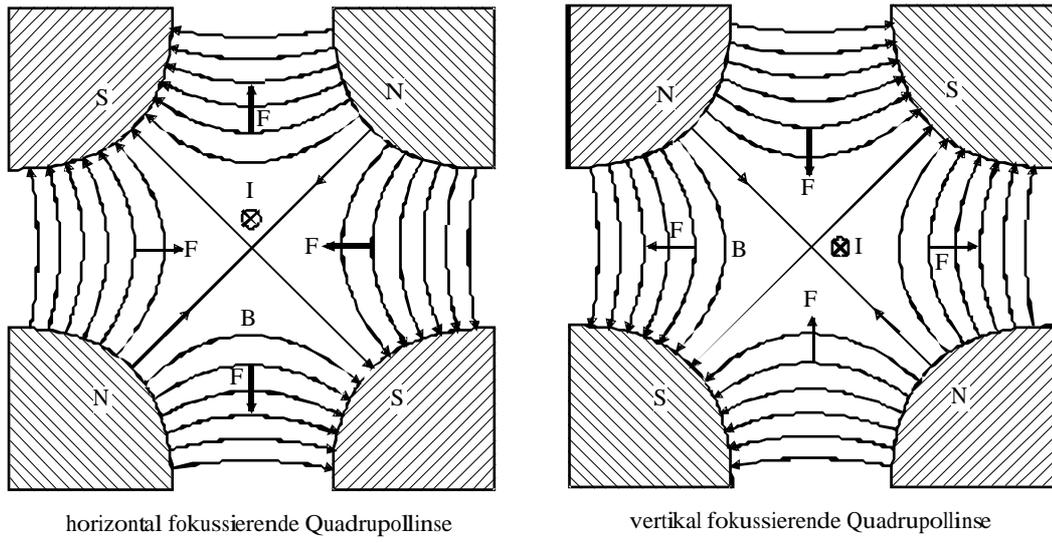


Fig. 3.2.1: Magnetische Fokussierung des Teilchenstrahles

3.3 Der π M1-Strahlkanal

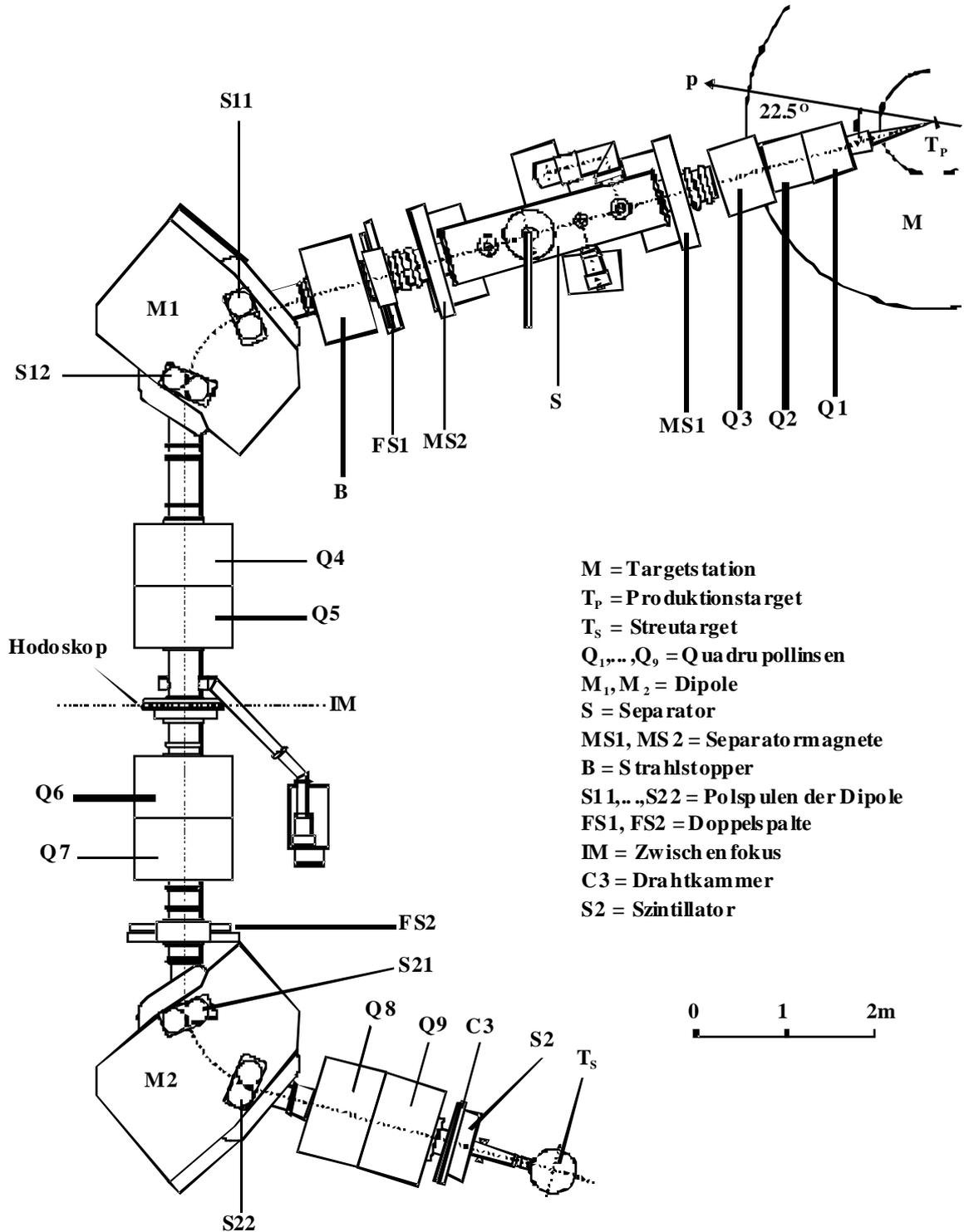


Fig. 3.3.1: Grundriss des π M1-Strahlkanals

π M1 ist ein hochauflösender Pion-Strahlkanal mit einem Impulsbereich zwischen 100 und 500MeV/c. Der Strahlkanal ist an die TM-Targetstation in einem Extraktionswinkel von 22.5° angeschlossen, welcher mit der Orientierung des Target-Rades korrespondiert. Der Pion-Impuls kann durch das Hodoskop im Zwischenfokus bestimmt werden, das aus 64 Szintillatorenstreifen besteht.

Charakteristiken des π M1-Strahlkanals

• Totale Pfadlänge	21m
• Impulsbereich	100 – 500MeV/c
• Impulsakzeptanz	2.9%
• Dispersion in der Fokalebene	7cm/%
• Punktgrösse am Target (FWHM)	15mm horizontal 10mm vertikal
• Winkeldivergenz am Target (FWHM)	35mrad horizontal 75mrad vertikal

Durch Wahl des B-Feldes der Ablenkmagnete kann der Impuls des Pionstrahles ausgewählt werden. Für unser Experiment haben wir einen Impuls $p_\pi = 136\text{MeV/c}$ gewählt.

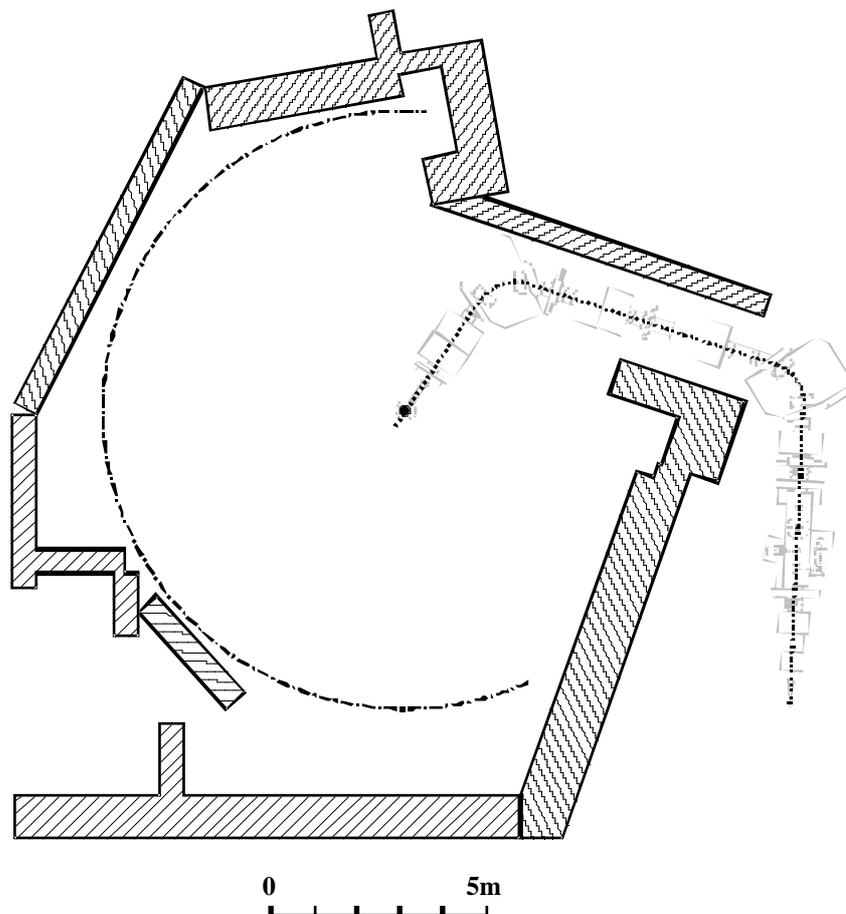


Fig. 3.3.2: Grundriss des π M1 Areals

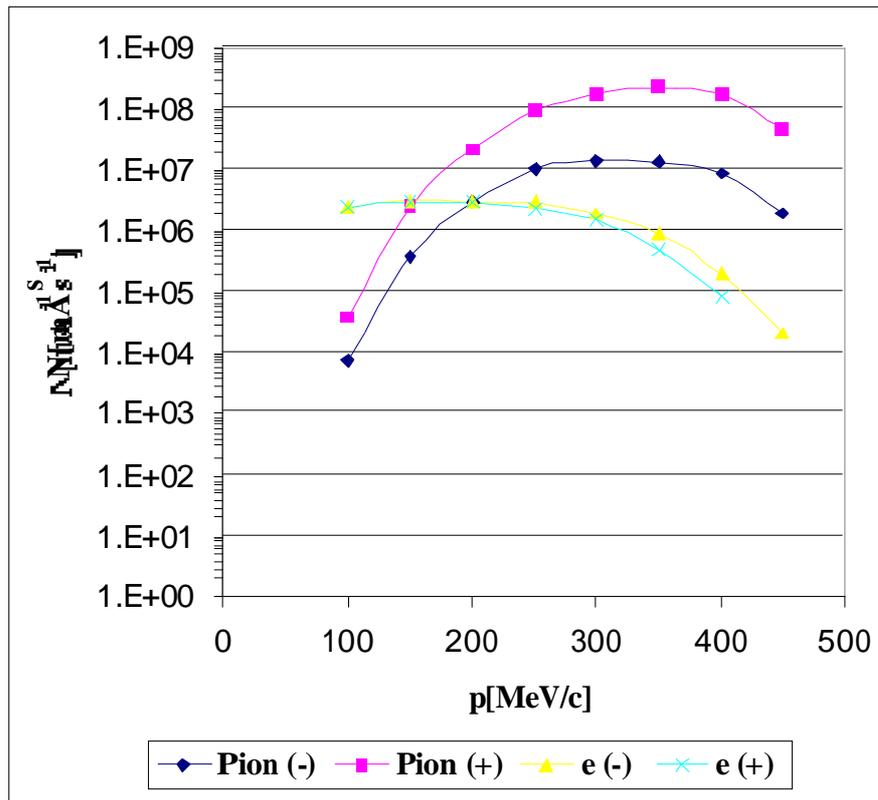


Fig. 3.3.1: Pion- und Elektron-Flüsse in $\pi M1$

3.4 Auswahl des Pion-Impulses

Der Impuls von Pionen aus dem $\pi M1$ -Strahlkanal kann durch die Manipulation der Dipolmagnete des Kanals genau definiert werden. Zuerst müssen wir uns für einen Impuls entscheiden, der unserem Versuchsaufbau optimal gerecht wird. Es sind zwei Tatsachen zu berücksichtigen:

- Von der Targetstation M des Protonenstrahlkanals werden zusätzlich zu den Pionen auch Positronen in den $\pi M1$ -Strahlkanal emittiert, die im Experiment unerwünscht sind.
- Die zu wählende Dicke des Degraders oder Moderators (CH_2 Paraffin) ist abhängig von der Energie des abzuschwächenden Pions und damit von dessen Impuls. Da wir nicht unbegrenzt CH_2 -Blöcke zur Verfügung hatten, waren uns in dieser Hinsicht Grenzen gesetzt.

Das Problem der Positronen kann auf die folgende Art gelöst werden: Man benutzt die unterschiedlichen Flugzeiten von Positronen und Pionen durch den $\pi M1$ -Strahlkanal und die Tatsache, dass der Strahl gepulst ist (50 MHz, Frequenz des Zyklotrons). Wählt man den Impuls des Pions so, dass das π -Paket zeitlich zwischen zwei Paketen aus Positronen das Target trifft, so können die Pionen mittels einer digitalen Schaltung ausselektiert werden. Mathematisch formulieren wir dies folgendermassen (n ist eine ganze Zahl):

$$t_{\pi} = \left(t_{e^+} + \frac{T}{2} \right) + nT \quad (1)$$

t_{π} und t_{e^+} sind die Flugzeiten der Pionen respektive der Positronen durch den Strahlkanal und $T = (f_{\text{Zyklotron}})^{-1} = 20\text{ns}$. Der Summand nT berücksichtigt, dass der erste Pion-Puls nicht sofort nach dem ersten Positron-Paket eintreffen muss. Die Ruheenergien der Teilchen betragen $m_{\pi}c^2 = 139.6\text{MeV}$ und $m_{e^+}c^2 = 0.511\text{MeV}$. Ausgehend von den Energiebeziehungen der speziellen Relativitätstheorie

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^2 \quad (2)$$

$$E^2 = mc^2 \gamma \quad (3)$$

und der Beziehung

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} \gamma \quad (4)$$

findet man

$$\frac{|\mathbf{p}|}{E} = \frac{\beta}{c} \quad (5)$$

Für das Positron gilt damit:

$$\beta = \frac{cp}{E} = \frac{cp}{\sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2}} \approx 1$$

für $mc^2 \ll cp$, d.h. die Positronen bewegen sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit. Die Flugzeit der Positronen berechnet sich damit zu $t_{e^+} = s/c \approx 70\text{ns}$. Die Pfadlänge des πM1 -Strahlkanals ist $s = 21\text{m}$. Man berechnet $\beta_{\pi} = v_{\pi}/c = s/t_{\pi}c$ und daraus den Impuls des Pions

$$p_{\pi} = m_{\pi} \gamma_{\pi} \beta_{\pi} c \quad (6)$$

Die kinetische Energie des Pions ist

$$E_{\text{kin}} = E - m_{\pi}c^2 = m_{\pi}c^2 (\gamma - 1) \quad (7)$$

Durchqueren geladene Teilchen Materie, so geben sie durch Stöße mit dem Medium Energie ab. Zu einem grossen Teil sind dies Wechselwirkungen mit den Hüllenelektronen, die zu Anregung oder Ionisation der Atome führen. Näherungsweise gilt für den Energieverlust

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi}{m_e c^2} \frac{nZ^2}{\beta^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\ln \frac{2mc^2\beta^2}{I \cdot (1-\beta^2)} - \beta^2 \right]$$

durch Ionisation die Bethe-Bloch-Formel mit $\beta = v/c$, wobei $Z \cdot e$ die Ladung und v die

Geschwindigkeit des Teilchens bedeuten, n die Elektronendichte ist und I das mittlere Anregungspotential der Atome (typischerweise $16\text{eV}\cdot Z^{0.9}$ für Kernladungszahlen $Z > 1$). Der Energieverlust hängt also von der Geschwindigkeit und der Ladung der Teilchen ab, nicht aber von ihrer Masse. Er fällt für kleine Geschwindigkeiten mit v^2 ab, erreicht bei $p/m_0c \approx 4$ ein Minimum und steigt bei relativistischen Teilchenimpulsen nur logarithmisch wieder an. Normiert auf die Dichte ρ des durchquerten Materials liegt der Energieverlust durch Ionisation pro Weglänge dx im Ionisationsminimum und auch bei höheren Teilchenenergien bei etwa $1/\rho \cdot dE/dx \approx 2\text{MeV}/(\text{g}\cdot\text{cm}^2)$. Für die Behandlung der Wechselwirkung von Elektronen mit Materie, kommt eine andere Physik zum tragen und die Bethe-Bloch-Formel gilt nicht mehr. Für schwere Teilchen, wie Pionen, kann sie aber angewendet werden. Die Reichweite (Range) eines Teilchens in Materie lässt sich durch Integration gewinnen:

$$R = \int_0^E dE \frac{1}{dE/dx}$$

und wird meist tabelliert in der Form $R/m_{\text{Teilchen}}(p)$, wobei die Länge R in Einheiten von Masse pro Flächeneinheit des Bremsmaterials gemessen wird (wegen des Faktors n in der Bethe-Bloch-Formel). Es gilt also

$$d = \frac{R}{\rho} \tag{8}$$

wobei ρ die Dichte des betrachteten Materials ist und d die Reichweite in Metern. Berechnen wir nun die Impulse, die zugehörigen kinetischen Energien und die benötigten Degraderdicken, um daraus die Wahl für einen sinnvollen Pion-Impuls zu treffen. Wir benützen dazu die Gleichungen (6), (7) und (8). Es ist $\rho(\text{CH}_2) = 0.9 \text{ g/cm}^3$. Berechnete Werte sind:

n	t_π [ns]	β	γ	p_π [MeV/c]	E_{kin} [MeV]	d [cm]
0	80	0.876	2.07	253	149	≈ 51
1	100	0.700	1.40	136	56	≈ 11
2	120	0.548	1.23	100	32	≈ 5
3	140	0.500	1.15	81	22	≈ 2
4	160	0.438	1.11	68	16	≈ 1
5	180	0.389	1.09	59	12	≈ 1

Der πM1 -Strahlkanal liefert Pionen mit Impulsen aus dem Bereich von 100 bis 500MeV/c. Nach obiger Tabelle sind die möglichen Impulswerte, die die Separationsbedingung erfüllen 253MeV/c, 136MeV/c und 100MeV/c. Bei einem Impuls von 253MeV/c hätten wir rund 50cm dickes Degrader-Material benötigt; soviel stand uns nicht zur Verfügung. Wir wählen einen Impuls von 136MeV/c aus. Dieser Impuls bedingt gut 10cm dickes Degrader-Material. Der Impuls von 100MeV/c ist wenig sinnvoll, da er an der Grenze des Impulsbereiches des πM1 -Strahlkanals liegt, und dort ist nach Fig. 3.3.1 der Pionfluss viel kleiner als im zentralen Impulsbereich.

3.5 Detektoren

Bei den Detektoren, die wir in unserem Experiment verwendet haben, wird die Tatsache ausgenutzt, dass geladene Teilchen beim Durchgang durch bestimmte Materialien Photonen erzeugen. Diese Photonen werden mittels eines Photomultipliers (PM) in elektrische Spannung umgewandelt. Wir verwendeten in unserem Experiment einen Natriumjodidkristall (NaI) zur Energiemessung und sieben Plastiksintillatoren zum triggern der Messung.

Szintillatoren

Die für das Atom scharfen Energiezustände der Elektronen verbreitern sich durch die Wechselwirkung im Gitter zu Energiebändern, die durch Energielücken voneinander getrennt sind.

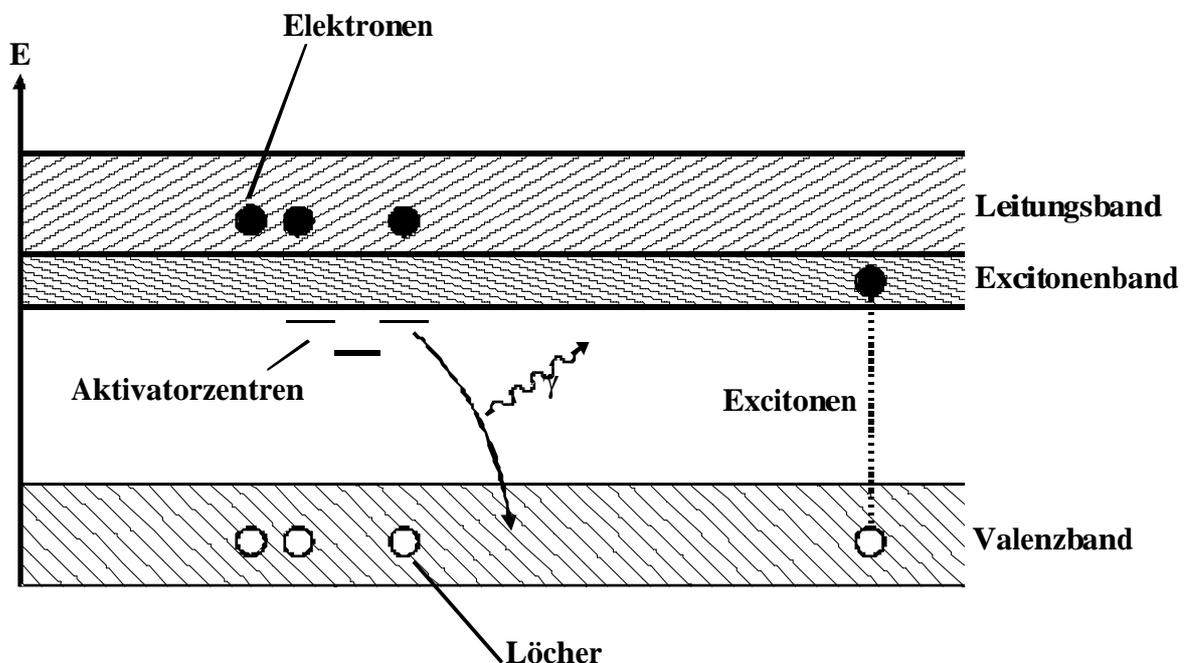


Fig. 3.5.1: Bändermodell des Szintillators

a. Alkalijodidkristalle

Für Alkalijodidkristalle beträgt der Abstand zwischen dem höchsten vollbesetzten Energieband (dem Valenzband) und dem folgenden, im Grundzustand leeren Energieband (dem Leitungsband) etwa 6 bis 8eV.

Wird dem Kristall Energie (z.B. in Form von Strahlung) zugeführt, können dadurch Elektronen aus dem Valenz- in das Leitungsband gehoben werden. Diese Elektronen und die im Valenzband entstandenen Löcher können sich durch den Kristall bewegen und so zu dessen elektrischen Leitfähigkeit beitragen. Daneben kann es auch geschehen, dass ein aus dem Valenzband gehobenes Elektron das Leitungsband nicht erreicht, und an das Loch gebunden bleibt. Solche gekoppelten Anregungszustände zwischen Elektron

und Loch nennt man Excitonen.

Der Bereich der Anregungsenergien eines Excitons liegt direkt unterhalb des Leitungsbandes. Excitonen sind nicht notwendig am Ort gebunden, sondern können durch den Kristall wandern.

Das bei normaler Temperatur emittierte Szintillationslicht (im sichtbaren Spektralbereich) stammt aus Vorgängen, bei denen Gitterfehlstellen eine Rolle spielen. Solche Gitterfehlstellen nennt man deshalb auch Leucht- oder Aktivatorzentren (z.B. Gitterlücken, eingebaute Fremdatome usw.). Dadurch werden innerhalb der Energielücke Energieniveaus erzeugt, die wegen der geringen Konzentration lokalisiert sind und keine Bänder bilden.

Das durch den Szintillatorkristall fliegende Teilchen erzeugt freie Elektronen oder Löcher und Excitonen die durch den Kristall wandern, bis sie ein Aktivatorzentrum treffen, an dem sie ihre Energie abgeben können. Dies führt zu Lichtemission des Aktivatorzentrums, wenn dies in den Grundzustand zurückkehrt. Da das Aktivatorzentrum energetisch im verbotenen Bereich liegt, ist der Kristall für das emittierte Photon durchlässig.

b. Plastiksintillatoren

Plastiksintillatoren bestehen aus einer transparenten Trägersubstanz in der die Aktivatoren als feste Lösung vorhanden sind. Trifft ein geladenes Teilchen auf den Szintillator, so werden die nicht szintillierenden Moleküle angeregt. Nun kann deren Energie auf die Moleküle der Szintillationssubstanz, die ein unterschiedliches Energie-Niveau-Schema besitzen, übertragen werden. Geht ein angeregtes Molekül in den Grundzustand über, wird ein Photon mit einer für die Trägersubstanz transparenten Frequenz emittiert.

Photomultiplier

An den Szintillator wird direkt oder über einen Wellenleiter ein oder mehrere Photomultiplier (PM) angeschlossen.

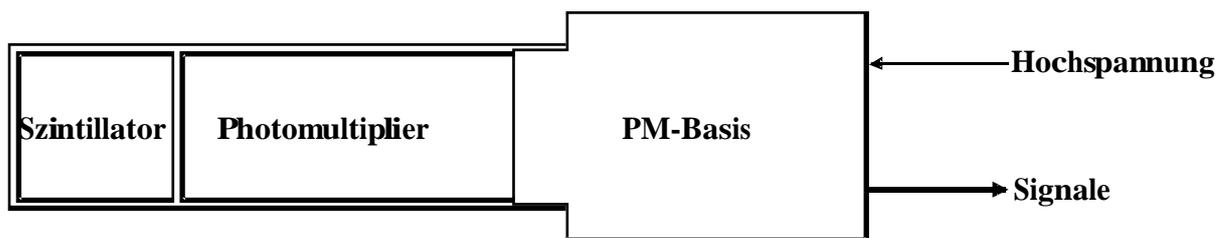


Fig. 3.5.2: Detektoranordnung

Die wesentlichen Bestandteile eines PM sind eine Photokathode, mehrere Dynoden und eine Anode. Ein Photon aus dem Szintillator löst mittels Photoeffekt ein Elektron aus der Kathode heraus, dieses wird beschleunigt und auf die erste Dynode fokussiert. An den Dynoden werden Sekundärelektronen herausgeschlagen, diese werden in Richtung der nächsten Dynode beschleunigt, die auf einem höheren Potential liegt als die vorangehende. Die Hintereinanderschaltung mehrerer solcher Dynoden bewirkt einen

Kaskadeneffekt. Der Gesamtverstärkungsfaktor eines PM, der sogenannte Gain G , hängt ab von der Anzahl der Dynoden und dem sekundären Emissionsfaktor δ , der wiederum proportional zur Potentialdifferenz zwischen zwei Dynoden ist.

Damit die Elektronen stark genug von Dynode zu Dynode beschleunigt werden, muss der PM mit einer Hochspannung zwischen 1 bis 2kV betrieben werden. Die angelegte Hochspannung wird über mehrere Widerstände geteilt und an die Dynoden angelegt. Die Spannungsdifferenz zwischen zwei jeweils aufeinanderfolgenden Dynoden muss konstant sein.

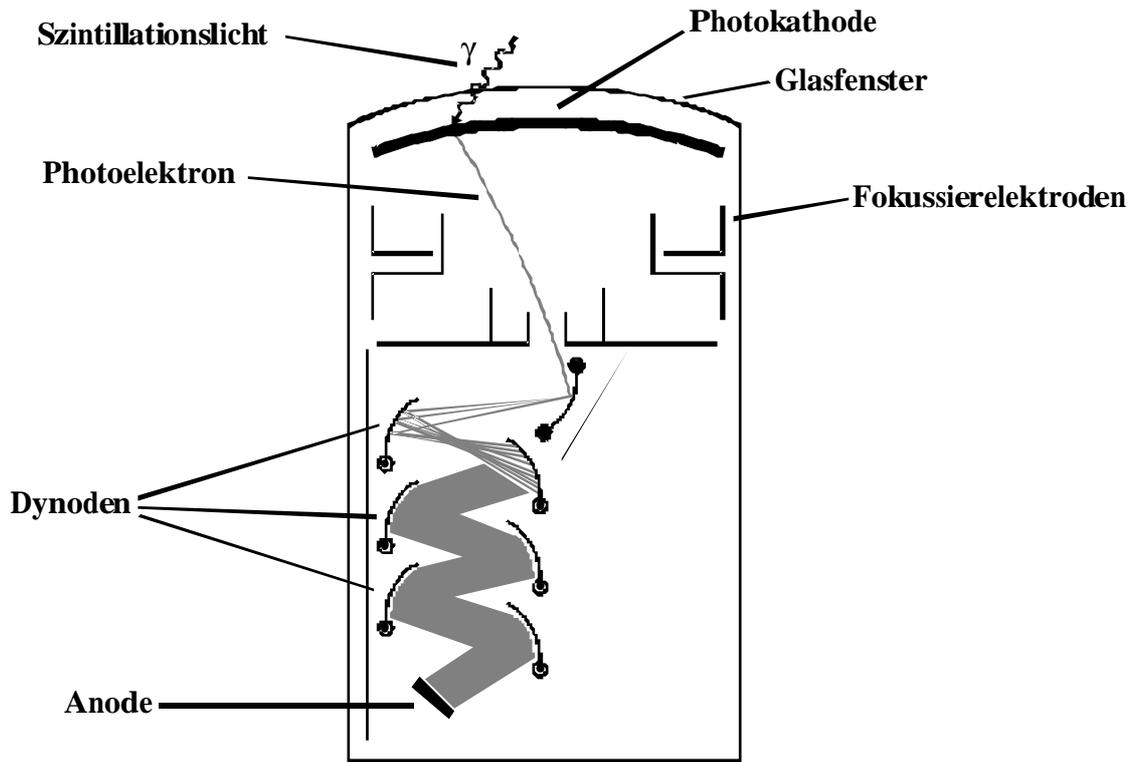
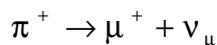


Fig. 3.5.3: Der Photomultiplier

3.6 Setup der Messung

Wir haben uns für Pionen mit einem Impuls von 136MeV/c entschieden. Mit dieser günstigen Wahl gelingt es uns, die Pionen von den unerwünschten Positronen aus dem π M1-Strahlkanal mittels einer digitalen Schaltung so gut als möglich auszusortieren. Die Wahl des Impulses wird in Abschnitt 3.4 begründet.

Der Pionstrahl passiert zuerst die Szintillatoren S1 und S2 und danach unser Degradier-Material (CH_2 , Paraffin). Der Pionstrahl tritt dann durch den Szintillator S3 und wird im Szintillator S4 (Target) gestopt, welches gegenüber dem Strahl um 45° gedreht ist. Das Target wurde so dick gewählt, dass praktisch alle Myonen aus dem Zerfall



noch im Target gestopt werden. Hinter dem Target wird zusätzlich der Szintillator S5 in

Strahlrichtung plaziert um ein Antiereignis zu erzeugen.

Der Degradier hat den Zweck die Pionen soweit zu verlangsamen, dass diese im Target stopen. Die Dicke des Degradier-Materials wird empirisch bestimmt, indem die Stoprate 1234-5 gemessen und gegen die Dicke des Degradier-Materials aufgetragen wird (**ein Stopereignis tritt dann ein, wenn unser Pion die Detektoren S1 bis S3 passiert hat und im Degradier soviel seiner kinetischen Energie verloren hat, dass es im Target S4 stoppt und somit im dahinter liegenden Detektor S5 kein Signal mehr auslöst**). Der optimale Wert liegt beim Maximum der Stoprate. Dieses Vorgehen führte auf eine Degradierdicke von 68mm bei einer π -Stoprate von 21.2kHz.

Vor dem Kristall (NaI) wurde ein Szintillationszähler-Teleskop bestehend aus den zwei Zählern S6 und S7 installiert. Dieses Teleskop limitiert den Einfallswinkel der Positronen auf $\Omega/4\pi \approx 0.3\%$ und legt die Richtung fest, aus der die Positronen eintreffen sollen (aus der Richtung des Targets). So konnte die Messung auf das Zentrum des Kristalls beschränkt werden, wodurch Randeffekte vermieden und eine optimale Energieauflösung erreicht wurde. Durch die Beschränkung der Einfallsrichtung der Positronen mittels des 67-Teleskops, wird die Wahrscheinlichkeit für zufällige Koinzidenzen verringert.

Die Energie der Positronen wird dann mit dem NaI-Kristall gemessen. Am Kristallende sind sieben PM angebracht, mit jeweils einem digitalen und einem analogen Ausgang.

Alle sieben verwendeten Szintillatoren sind je an einen PM angeschlossen. Sämtliche PM werden mit Hochspannung direkt aus der Mess-Baracke betrieben. Die Szintillatorsignale werden in die Mess-Baracke gesendet. Für die Datenübertragung und die Speisung mit Hochspannung werden Koaxialkabel verwendet, wobei darauf zu achten ist, dass diese stets mit einem Widerstand von 50k Ω abgeschlossen sind, um lästige Reflexionen an den Enden zu vermeiden. Die Szintillatoren S3 und S5 benötigten nebst der Versorgung mit Hochspannung noch eine Vorverstärkung.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Abschirmung des Experimentes. Vor allem gestreute Neutronen können die Messung wesentlich verfälschen. Mit einer Abschirmung aus Paraffin und Blei können solche Effekte wirksam unterdrückt werden.

Abmessungen der verwendeten Szintillatoren:

Szintillator	Dicke	Breite	Länge
S1	6mm	200mm	200mm
S2	20mm	100mm	100mm
S3	6mm	100mm	100mm
S4	3mm	80mm	70mm
S5	5mm	200mm	200mm
S6	6mm	40mm	40mm
S7	3mm	50mm	80mm

Dicke des verwendeten Degradier-Materials:

4 x	10mm	(weisses Paraffin)
3 x	1mm	(weisses Paraffin)
1 x	25 mm	(schwarzes Paraffin)

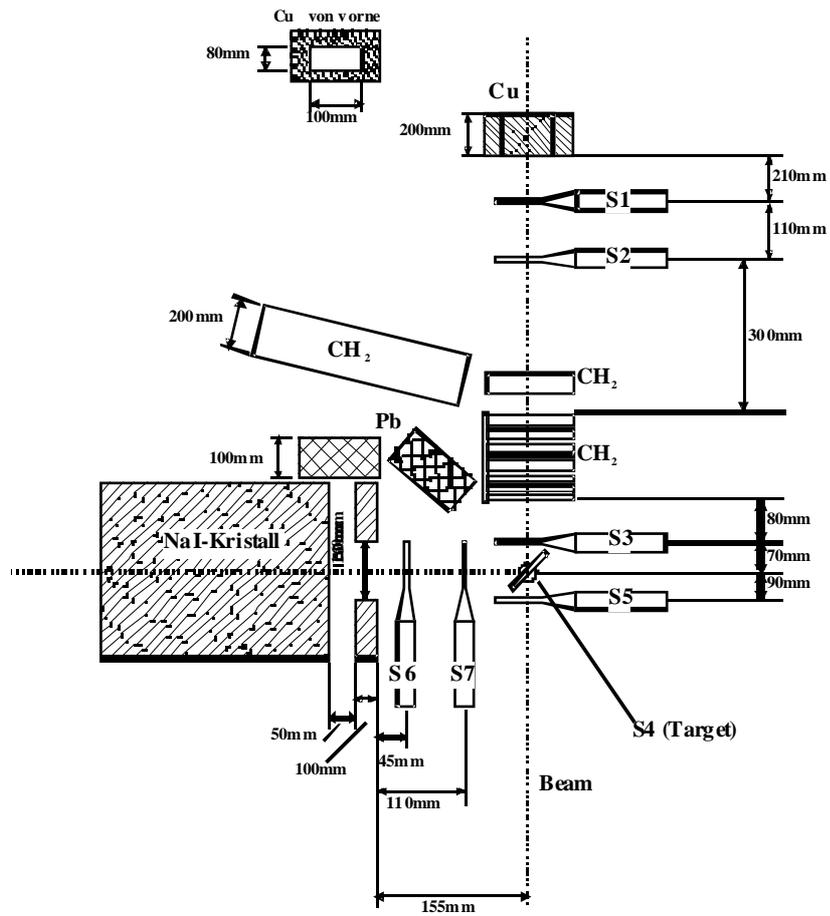


Fig. 3.6.1: Setup der Messung

4. Elektronik

Die Elektronik wird mit CAMAC- und NIM-Modulen aufgebaut. CAMAC steht für ein modulares Datenverarbeitungssystem, welches in praktisch jedem Kernphysik-Labor verwendet wird. Es ist ideal für Hochgeschwindigkeits-Datensammlungssysteme. Unter Hochgeschwindigkeit versteht man eine Datenübertragungsrate von mindestens 1MByte/s. Rückseitig sind diese Module über eine 24bit Leitung mit dem CAMAC-Kontroller verbunden, der die Daten über eine Bus-Karte im PC via DMA übermittelt. NIM (Nuclear Instrumentation Module) ist ein bewährter Standard in der Kernphysik. Diese Module werden häufig für schnelle Trigger- und Logik-Konfigurationen verwendet. All diese Module werden modular zusammengesteckt und vorderseitig mit Kabeln miteinander verbunden.

4.1 Triggerelektronik-Module

ADC

Der ADC (Analog-to-Digital Converter) erlaubt die quantitative Messung der Energie eines elektrischen Pulses. Sie wird als 11bit Wert ausgegeben. Das verwendete ADC-Modul hat 12 Kanäle, was das Messen mehrerer Kalorimeter-Signale erlaubt. Der Höchstwert wird bei -512pC erreicht. Dies entspricht also einer Auflösung von 0.25pC . Die Digitalisierung funktioniert so: Der zu messende Puls lädt einen Kondensator auf. Danach wird der Kondensator kontrolliert entladen. Die Zeit der Entladung wird durch Zählen von Zeitintervallen bekannter Länge gemessen und dann als digitaler Binärwert ausgegeben.

TDC

Der TDC (Time-to-Digital Converter) ist ein Hochgeschwindigkeits-Zeitmessmodul. Der TDC misst die Zeit zwischen dem Start- und dem Stop-Signal. Es können Zeiten bis einige Hundert psec gemessen werden. Die Ausgabe erfolgt in 11bit Werten. Für den Zeitbereich von 0 bis 100nsec ergibt dies eine Auflösung von 50psec . Die Messung funktioniert ähnlich wie beim ADC. Es wird während der Zeit zwischen Start und Stop ein Kondensator kontinuierlich aufgeladen. Die Ladung wird dann wie oben beschrieben gemessen. Das Mass der enthaltenen Ladung ist ein Mass für die Zeit .

Diskriminator

Der Diskriminator ist die Schnittstelle zwischen der analogen und der logischen Seite des Versuchsaufbaus. Er generiert aus dem analogen Signal eines Photomultipliers ein logisches Signal im NIM-Format, welches sehr genau mit der Zeit korreliert. Bei den verwendeten Diskriminatoren kann der Threshold, die Verzögerung sowie die Länge des Pulses eingestellt werden.

Ein Constant-fraction-Diskriminator erlaubt es, den Schaltzeitpunkt sehr genau innerhalb des Signals einzustellen.

Coincidence-Einheiten

Coincidence-Module erzeugen immer ein Signal, wenn die Eingangssignale dem gewünschten logischen Zustand genügen. Es gibt UND, ODER, und beliebig konfigurierbare Module. Mit Invertern können beliebige Zustände gefordert werden.

Delay-Trigger

Der Delay-Trigger löst auf einen Eingangsimpuls einen zeitlich verzögerten Impuls aus. Sowohl die Verzögerung als auch die Länge des erzeugten Impulses können eingestellt werden.

FAN-In und FAN-Out

Ein linearer FAN-In addiert analoge Signale und wird oft verwendet, um die Summe von mehreren Kalorimetern zu erzeugen. Ein digitaler FAN-In dient als ODER-Einheit. Ein FAN-Out liefert das Eingangssignal an mehreren Ausgängen.

Computer

Wenn die Elektronik ein gültiges Ereignis gemessen hat, so generiert es für den PC ein LAM-Signal (LAM steht für Look At Me). Der Computer fragt diesen LAM-Interrupt regelmässig ab. Liegt ein solches LAM-Signal vor, so stellt er mit dem ADC und TDC über den Bus Kontakt her und liest über die digitale Schnittstelle die gemessenen digitalen Werte aus. Nachdem die Register ausgelesen sind, speichert er die Daten als Ereignis in einer Datenbank. Er setzt den ADC, den TDC sowie das Flip-Flop mit einem Reset in ihren Bereitschaftszustand. Durch das Zurücksetzen des Flip-flop wird auch das INHIBIT-Signal (siehe Erklärung der Schaltungsgruppen) inaktiv. Die Schaltung ist dann bereit für eine neue Messung.

4.2 Die Triggerelektronik

4.2.1 Aufgaben der Triggerelektronik

Die Schaltung hat folgende Aufgaben:

1. Sie soll aus den Signalen der Szintillatoren und des Natriumiodids einen gültigen π -Zerfall erkennen
2. Im Falle eines gültigen π -Stops sollen die Messwerte vom ADC und TDC eingelesen werden.
3. Der Computer soll veranlasst werden, die Daten einzulesen und die Schaltung neu zu initialisieren

Bemerkung zu 1: Als gültiger π -Zerfall gilt folgender Fall: Innerhalb 1.3ms nach einem π -Stop darf kein weiteres Pion stopen. Ebenso darf mindestens 1.3ms vor dem aktuellen einem π -Stop kein Pion im Target gestopt haben. Innerhalb einer gewissen Zeit muss ein Zerfall im Natrium-Iodid nachgewiesen worden sein.

4.2.2 Schaltungsgruppen und ihre Funktionen

Die Schaltung hat auf der linken Seite die Eingänge der Szintillatoren S1-S7, des strahlsynchronen Sinussignals, sowie der Szintillatoren des Natrium-Iodids. Ein weiterer Eingang ist das INHIBIT-Signal, welches von der Schaltung selbständig erzeugt wird. Der Reset-Eingang kommt vom PC. Als Ausgang gelten die INHIBIT-Leitung, sowie die Registerausgänge des ADC und des TDC.

π -Stop

Die fünf Szintillatorensignale S1 bis S5 werden mit Hilfe der Delays synchronisiert und durch die Diskriminatoren in digitale Pulse gewandelt. Die Koinzidenz C12345' ergibt genau dann ein Signal, wenn S1 bis S4 ein Signal liefern, S5 jedoch nicht. Die Szintillatoren S1 bis S5 sind so angeordnet, dass diese Koinzidenz einem π -Stop Ereignis entspricht (siehe Kap. 3).

Pile-up Veto

Dieser Schaltungsteil soll verhindern, dass zwei Pionen-Zerfälle sich gegenseitig beeinflussen. Dies wird erreicht, indem nach einem gültigen π -Stop eine Zeit von 1.3ms beobachtet wird. Stopt in dieser Zeit ein weiteres Pion, so wird die Messung verworfen. Falls also innerhalb 1.3ms nach dem ersten π -Stops ein zweiter π -Stop auftritt, so erzeugt der Schaltungsteil einen Puls der Länge 1.3ms (Veto Signal): Ein erster π -Stop erzeugt in C1 keine Koinzidenz, da das Signal bei T1 verzögert wird. Bei T1 wird ein Trigger von 1.3ms Länge geschaltet. Folgt innerhalb dieser 1.3ms ein zweiter π -Stop, so gibt es bei C1 eine Koinzidenz, womit bei T2 für 1.3ms das Pile-up Veto Signal aktiviert wird.

Start Filter

π -window erzeugt aus dem strahlsynchronen Sinussignal einen Puls, der in der Breite und in der Phase auf den Pionen-bunch eingestellt ist. Ein erster π -Stop kann C7 passieren, ein innerhalb der nächsten 10ms folgender jedoch nicht, da er durch IX unterbunden wird. Diese Schaltungsgruppe dient dazu, dass der TDC nur einen Start-Impuls erhält.

Decay

Es wird nur ein Puls erzeugt, wenn die Szintillatoren S6 und S7 sowie das digitalisierte Summensignal der Szintillatoren des Kalorimeters ein Teilchen registrieren. Das Teilchen ist dabei in S4 zerfallen, wie aus der Anordnung der Szintillatoren ersichtlich ist.

INHIBIT

Das INHIBIT-Signal verhindert bei den Koinzidenzen C7 und C67'R das Start- bzw. das Decay-Signal. Es bedeutet logisch, dass im Moment entweder der Computer auslesen

muss oder ADC und TDC nach einem Stop, aber nicht erfolgtem Decay zurückgesetzt werden müssen (5ms Puffer).

LAM / INHIBIT Generator

Falls kein Pile-up Veto vorliegt und ein Decay stattgefunden hat, so wird nach Ablauf von 511ns bei T3 ein 1.3ms langer Puls erzeugt, der einen Eingang von C2 aktiviert. Kommt nun das durch D1 verzögerte start-Signal, so erzeugt es ein LAM. Auch wird sofort ein Flip-flop aktiviert, welches das INHIBIT-Signal dauernd einschaltet. In diesem Fall wird das INHIBIT erst durch ein Reset des PC wieder ausgeschaltet.

Falls ein Pile-up Veto anliegt oder kein Decay stattgefunden hat, so schaltet das verzögerte Start-Signal für 5ms das INHIBIT-Signal ein. Wenn das INHIBIT-Signal wieder inaktiv ist, können in den Koinzidenzen C7 und C67'R die Signale vom π -Stop bzw. vom Decay wieder ein Signal auslösen. Somit ist die Schaltung wieder in ihrem messbereiten Ausgangszustand.

Messung der Zeit zwischen π -Stop und Decay

Der TDC misst die Zeit zwischen dem Start-Signal vom Start-filter und dem Stop-Signal der Decay-Gruppe. Der Delay D2 dient zur Eichung des TDC. Man beachte, dass im allgemeinen D2 einen konstanten Offset in der Zeitmessung generiert.

Messung der Energie im Kalorimeter

Ein Decay-Signal erzeugt im Trigger T5 einen Puls der Länge 511ns. Dieser Puls schaltet das Gate des ADC. Die Länge des Gates ist so gewählt, dass die Analog-Signale der Szintillatoren von Zerfällen hoher sowie niederer Energie zum grössten Teil abgedeckt sind. Die Signale des NaI sind so verzögert, dass sie während das Gate offen ist das ADC erreichen.

4.3 Zeitablaufschemata

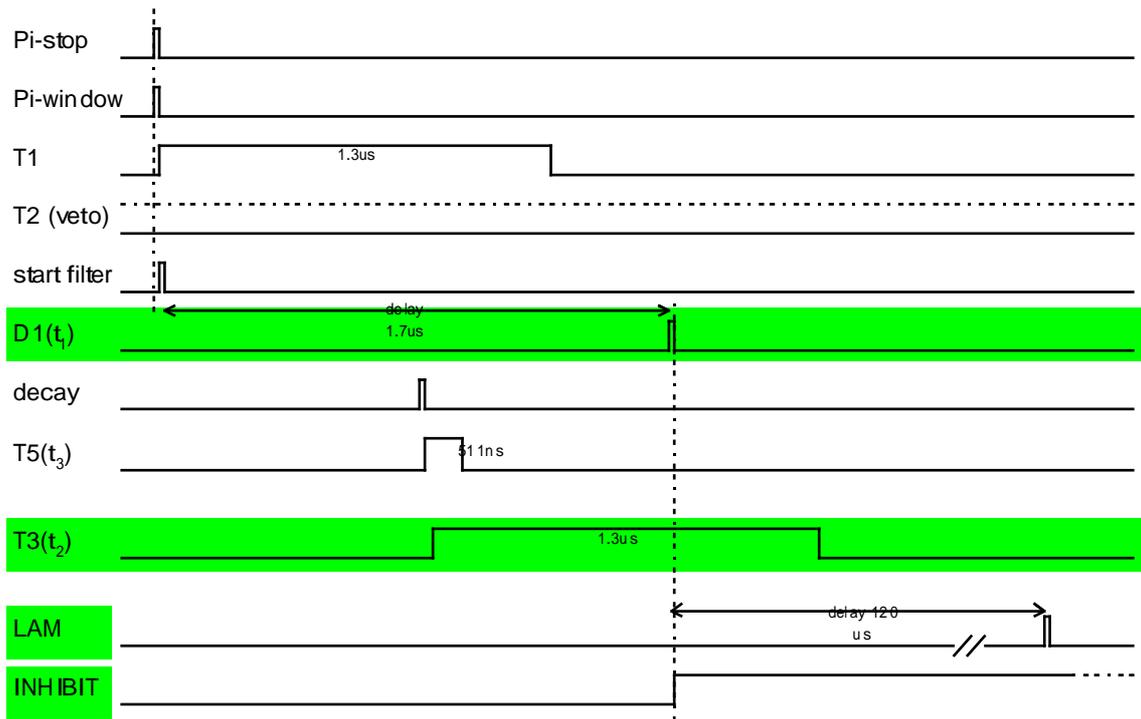


Fig. 4.3.1: Kein zweiter π -Stop innerhalb Veto-Zeit, INHIBIT inaktiv

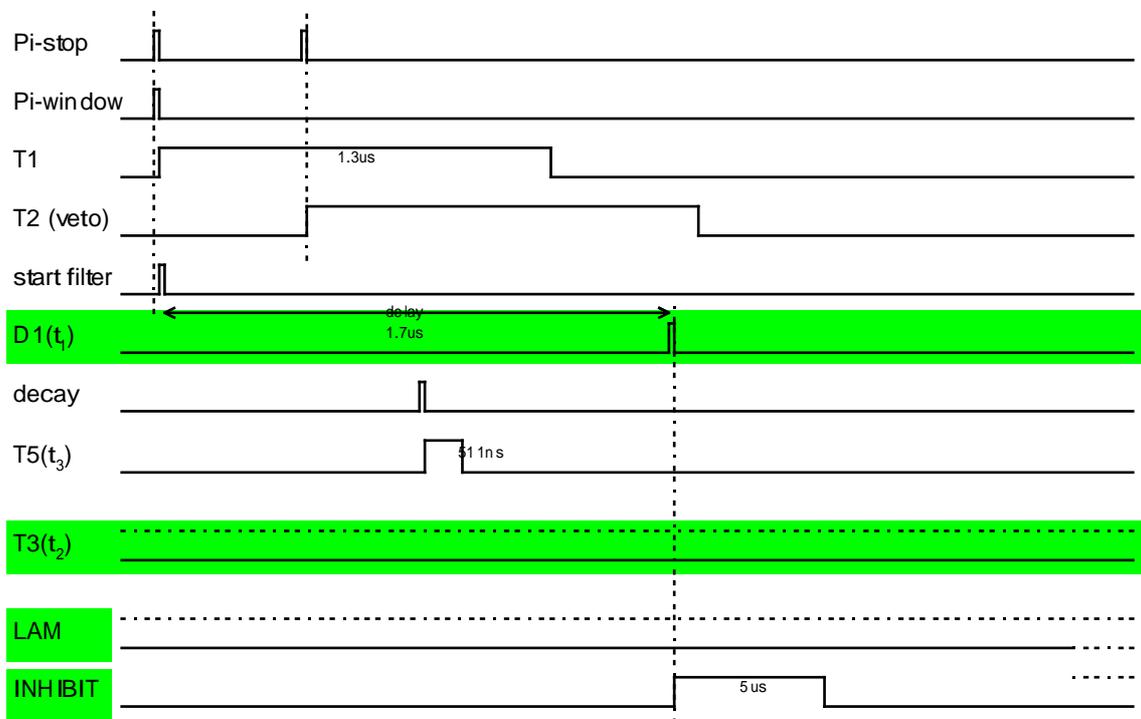


Fig. 4.3.2: Zweiter π -Stop innerhalb Veto-Zeit, INHIBIT inaktiv

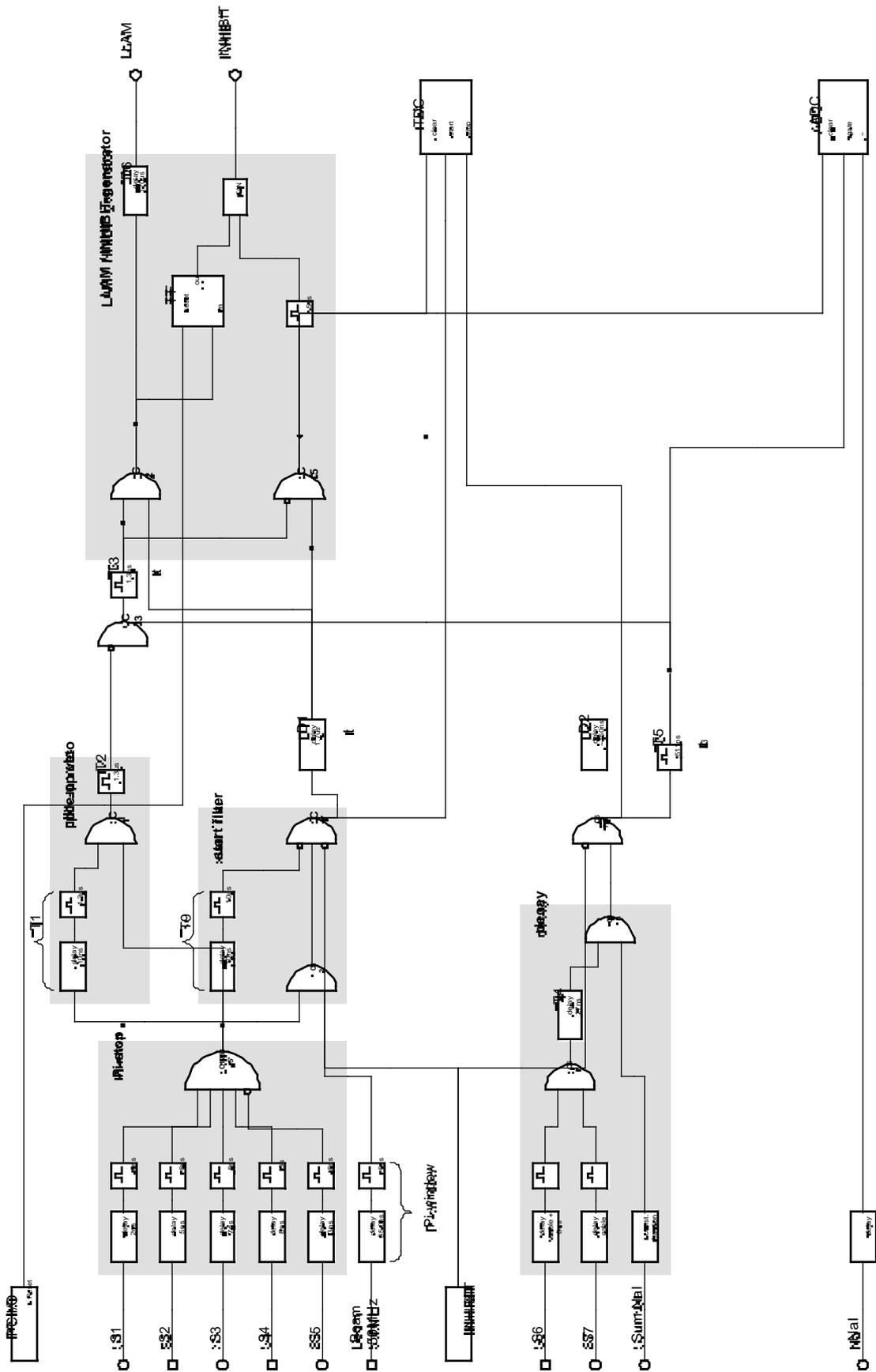


Fig. 4.3.3: Schaltschema der Auswertungselektronik

5. Auswertung

5.1 Pedestals, Linearität und Drift des ADC

Damit wir eine sinnvolle Auswertung erhalten, müssen wir zunächst überprüfen, ob ADC und TDC unsere Anforderungen an Funktionalität überhaupt erfüllen. Unsere Aufgabe besteht darin, zu überprüfen, ob ADC und TDC linear sind und wo der Nullpunkt liegt. Ausserdem interessiert uns deren zeitliche Stabilität. Beim ADC galt es zu bestimmen, ob der Energienullpunkt mit der Binnummer 0 übereinstimmt. Sollte dies nicht der Fall sein, so müssten diese Pedestals bei der weiteren Auswertung berücksichtigt werden. Beim TDC spielt dies keine Rolle, da der π -Stop als Zeitnullpunkt gewählt wurde. Wir wollen aber auch ADC und TDC auf ihre Linearität prüfen. Wird die doppelte Energie bzw. Zeit auch wirklich in der doppelten Binnummer eingeschrieben (nach Abzug des Nullpunktes)? Driften ADC und TDC mit der Zeit? Wir müssen all dies untersuchen und dann auch evtl. in der Auswertung berücksichtigen. Die ADC-Pedestals wurden bestimmt durch Ausstecken und Terminieren der ADC-Eingänge. Mehrere Wiederholungen dieser Messung zeigen, dass der Drift der Pedestals innerhalb einer Schranke von ca. 1% schwankt und daher vernachlässigt werden kann. Zur Bestimmung der Linearität des ADC haben wir Pulse in einen ADC-Kanal gegeben mit Breite 50 ns und unterschiedlichen Pulshöhen.

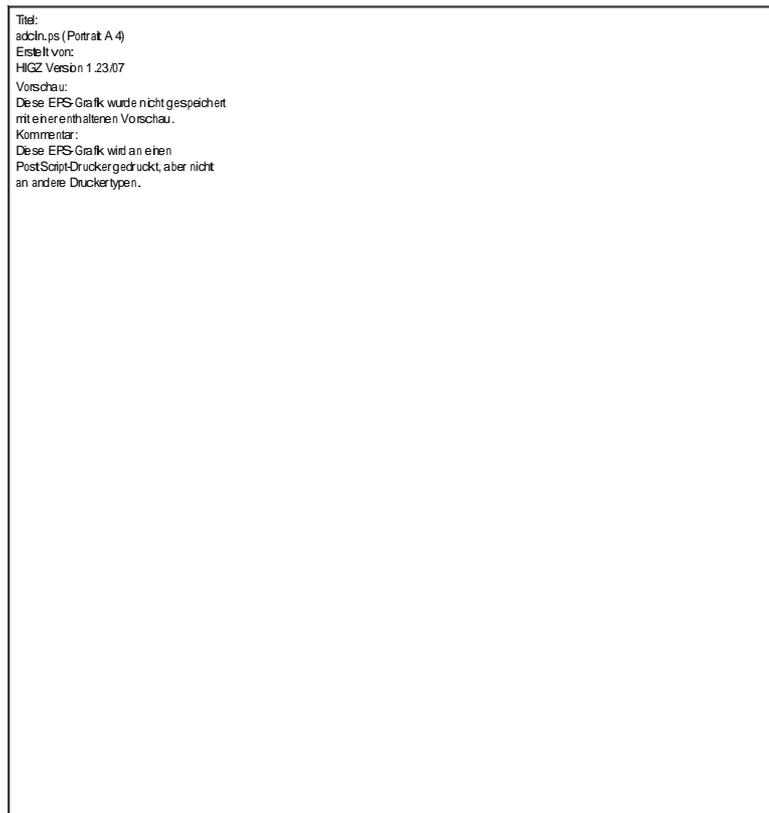


Fig. 5.1.1: Versch. Kalibrationsruns des ADC

Bei Wiederholung der Messung zeigt sich, dass der ADC tatsächlich driftet (s. Fig. 5.1.1). Dies wird aber bei der Addition der verschiedenen Runs berücksichtigt (s. unten). Die Linearität zwischen den für uns wichtigen Kanalnummern 100 und 800 ist für den Run 64 in Fig. 5.1.2 dargestellt:

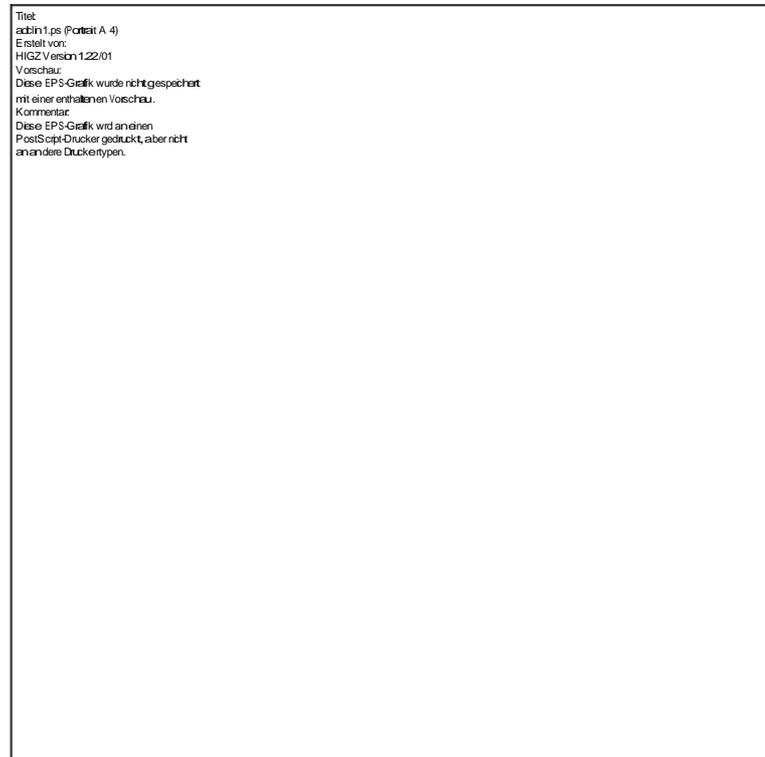


Fig. 5.1.2: Run 64 mit Fit

Der Fit mit der linearen Funktion

$$\text{ADC-}\# = p_1 \cdot \text{Pulshöhe} + p_2$$

ergibt:

$$p_1 = 3.70 \pm 0.05$$

$$p_2 = 37.6 \pm 1.1$$

$$\chi^2 = 1000/7 \text{ NDF}$$

5.2 Kalibration und Linearität des TDC

Wir haben die Linearität des TDC überprüft, indem wir vier Pulse mit verschiedenen bekannten Delayzeiten, nämlich 100, 400, 800 und 1200 ns, in den TDC gespeist haben.



Fig. 5.2.1: Linearität des TDC

Fig. 5.2.1 zeigt, dass die Linearität sehr gut ist. Der lineare Fit

$$\text{TDC} - \# = p_1 \cdot \text{Zeit} + p_2$$

ergibt:

$$p_1 = 0.941 \pm 0.001$$

$$p_2 = -42.7 \pm 0.6$$

$$\chi^2 = 22 / 4 \quad \text{NDF}$$

entspricht auch den Umrechnungsfaktoren: 1.062ns/bin resp. 0.941Bins/ns. Der TDC-Nullpunkt liegt im Negativen. Um zu verhindern, dass wir die direkten Elektronen verpassen, mussten wir das Stoppsignal für den TDC (mit Delay D2, s. Kap. 4) um ca. 150ns verzögern. Dadurch erhalten wir auch die Möglichkeit, den Background zu messen, indem wir die sehr frühen Zeiten betrachten, d.h. das TDC-Spektrum vor dem π -Stop. Ferner haben wir im Verlauf der Messungen weitere TDC-Kalibrationen durchgeführt, um ein eventuelles Driften des TDC festzustellen. Dabei zeigte sich, dass der Drift des TDC (bzgl. Kalibrations-Absolutwerten) weniger als 0.7% beträgt und deshalb gegenüber den anderen Fehlern vernachlässigt werden kann.

5.3 Addition der Spektren

Am Schluss des Experiments hatten wir 64 Runs mit ca. 8,4 Millionen Events registriert. Davon waren 21 Runs kalibriert und ohne Zwischenfälle verlaufen. Diese umfassten ca. 7,4 Millionen Ereignisse, die in die Auswertung eingingen. Um die

unterschiedlichen Kalibrationen und Einstellungen (bzw. der Drift der ADC) der einzelnen Runs zu berücksichtigen, mussten die Spektren einzeln addiert werden. Die Energie der Michelkante, welche mit dem unten beschriebenen Fit bestimmt wurde, erwies sich als geeignete Eichgrösse. Zu jedem Run wurde die Binnummer dieser Energie bestimmt, sodass die Spektren der einzelnen Runs übereinander gelegt werden konnten. Zu diesem Zweck wurde das Spektrum mit der Theoriefunktion des Michelspektrums gefittet und die Kanntenmitte als Eichgrösse definiert. Zusätzlich mussten die Spektren skaliert werden, so dass die Anzahl Bins zwischen ADC-Pedestal und Michelkante immer gleich gross war. Nachdem die Michelkante und die Skalierungsfaktoren für jeden Run bekannt waren, konnten die Spektren der einzelnen Runs damit verschoben, gestaucht und anschliessend addiert werden. Das Resultat waren ADC- und TDC-Spektren (s. Fig. 5.3.1 bzw. 5.4.1), welche die Messdaten von allen Runs enthielten. Die folgenden Auswertungen beruhen auf der Gesamtzahl der verwertbaren Ereignisse.

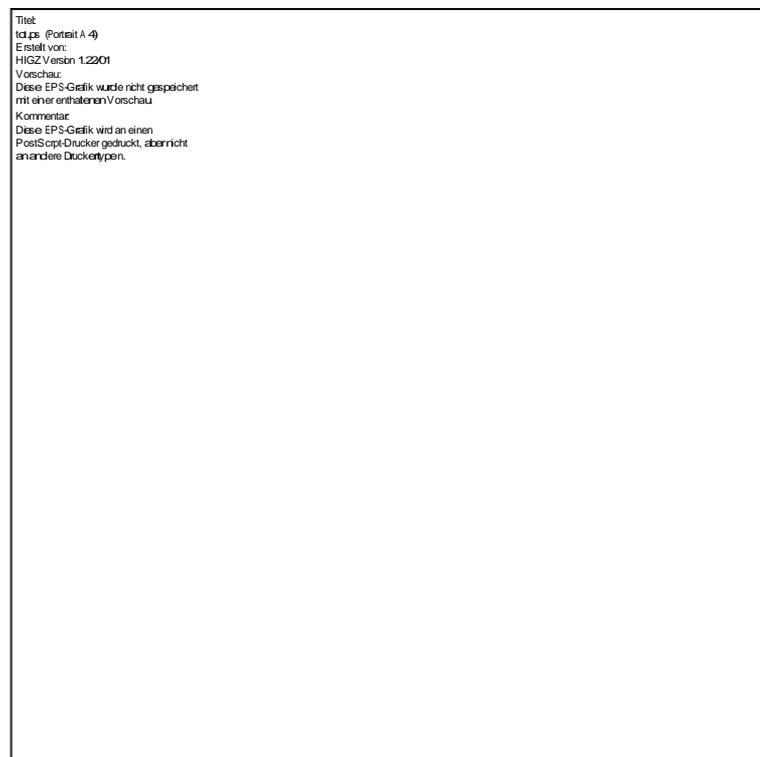


Fig. 5.3.1: Totales Energiespektrum

5.4 Bestimmung der Lebensdauern von μ und π

Betrachtet man das totale Zeitspektrum des TDC, so erkennt man, dass darin vier Signale verschiedenen Ursprungs enthalten sind (s. Fig. 5.4.1):

1. Ein Untergrund. Erscheint bei $TDC\# < 100$
2. Ein Peak von prompten Teilchen, bei $TDC\# \approx 130$
3. Ein exponentieller Anstieg von Elektronen aus dem π - μ -Zerfallskanal
4. Ein exponentieller Abfall der π - μ -Elektronen.

Betrachtet man nur diejenigen TDC-Ereignisse mit Energien grösser als die Energie der Michelkante, so sind nur wenige davon aus dem Zerfallskanal π - μ ; andererseits ist der Anteil der direkten Elektronen viel kleiner, wenn man nur solche mit Energien kleiner als die der Michelkante betrachtet. Diese Tatsache wird im folgenden benutzt, um die Lebensdauer von π und μ zu bestimmen.

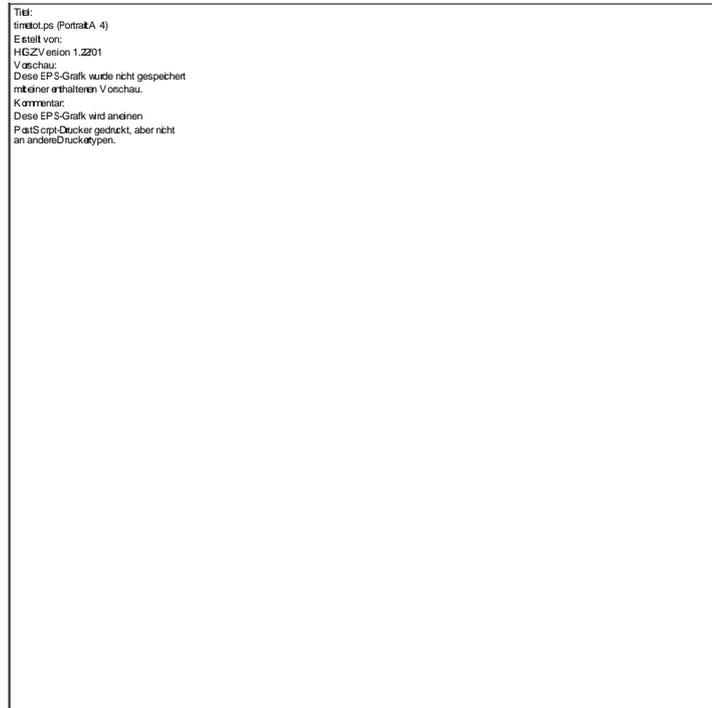


Fig. 5.4.1: Totales TDC-Spektrum

Untergrund (Kanal# < 100)

Betrachtet man die TDC-Spektren, so zeigt sich bei frühen Zeiten ($t < t_{\pi\text{-Stop}}$), dass ein bestimmter Untergrund vorhanden ist und sich — scheinbar konstant — über das gesamte Spektrum erstreckt. Wir haben festgestellt, dass dieser am besten mit einer konstanten Funktion beschrieben wird. Weder mit exponentiellen noch mit linearen Funktionen konnten die Spektren besser beschrieben werden. Der Verdacht liegt nahe, dass es sich bei diesem Untergrund um ein ständiges "Rauschen" handelt, das von Positronen erzeugt wird, welche im Bereich der Experimentieranordnung durch Mehrfachstreuungsprozesse entstanden sind.

Das Energiespektrum des Untergrundes (Zeit-Cut: $t < t_{\pi\text{-Stop}}$) ergibt ein typisches Michelspektrum. Dies deutet darauf hin, dass der Untergrund von Myonen verursacht worden ist. Ebenso könnten Neutronen dazu beigetragen haben, denn sie entstanden in grosser Menge im Kollimator: Es zeigte sich nämlich, dass dieses Rauschen kleiner wurde, als man Paraffinblöcke zwischen Kollimator und Detektor stapelte. (s. Kap. 3)

Der prompte Teilchen-Peak (Kanal# \approx 130)

Mit den Daten von Run 25 wurde ein Cut für hohe Energien durchgeführt, was zu einem

extremen Anwachsen des prompten Peaks geführt hat. Die Vermutung liegt nahe, dass es sich hierbei um direkt gestreute Neutronen handelte. Die Ereignisse dieses Peaks werden beschrieben durch eine Gaussfunktion. Ihr Mittelpunkt entspricht dem Zeitpunkt des π -Stops. Ansonsten gehen diese Ereignisse nicht weiter in die folgenden Berechnungen ein.

Das TDC-Spektrum für kleine Energien ($E < \text{Michelkante}$, d.h. Bin 3600)

Hier dominiert der exponentielle Anstieg der Ereignisse aus dem π - μ -Kanal. Er wird besonders klar hervorgehoben durch Subtraktion des Untergrunds und des Gausspeaks der prompten Elektronen.

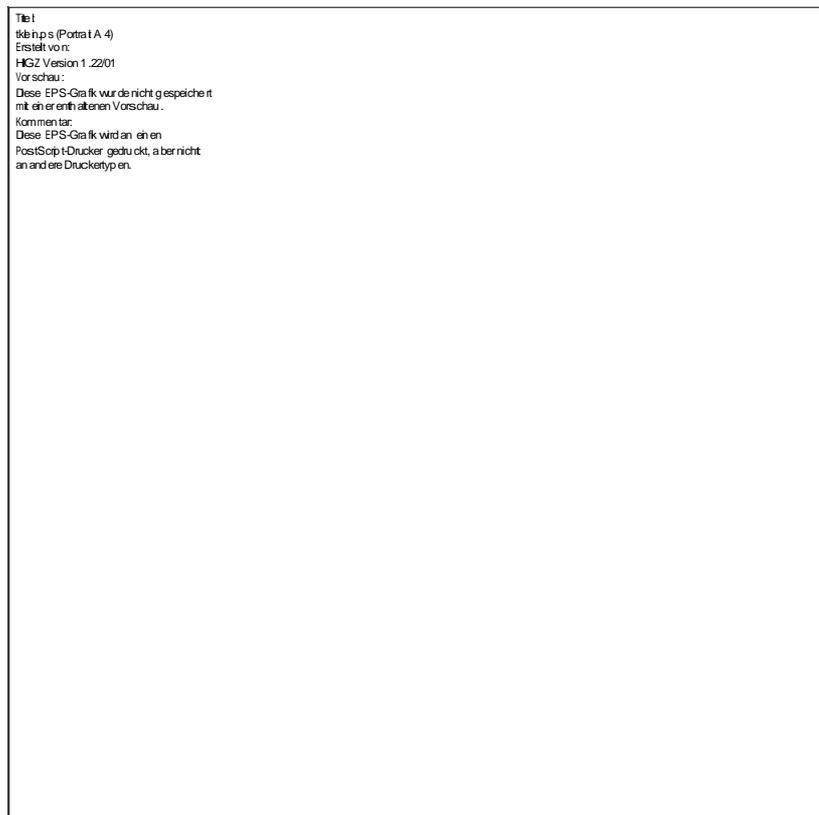


Fig. 5.4.2: TDC-Spektrum für Ereignisse kleiner Energie ($E < \text{Michelkante}$, d.h. Bin 3600)

In der obigen Abbildung ist der Fit des π - μ -Kanals gemäss

$$N = c_{BG} + \left[c_{Ampl} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-c_{\pi}}{\tau_{\pi}}} \right) \cdot e^{-\frac{t-c_{\pi}}{\tau_{\mu}}} \right] + \left[c_{Gaussampl} \cdot e^{-\frac{((t-c_{\pi})-c_{Gausscenter})^2}{2 \cdot c_{Gausswidth}^2}} \right] \quad (1)$$

bereits eingezeichnet. Dieser Fit ergibt die folgenden Werte (die Terme der obigen Formel entsprechen den eingangs erläuterten Signalen 1-4):

$$\begin{aligned}
c_{BG} &= 3096.7 \pm 0.4 \\
c_{Ampl} &= 24430.0 \pm 0.8 \\
c_{\pi\text{-stop}} &= 117.930 \pm 0.004 \\
\tau_{\pi} &= 31.561 \pm 0.008 \\
\tau_{\mu} &= 1927.900 \pm 0.008 \\
\chi^2 &= 12.02 / 333 \text{ NDF}
\end{aligned}$$

Die Einheiten dieser Werte sind Anzahl Bins bzw. Anzahl Events. Die angegebenen Fehler sind rein statistischen Ursprungs. Damit lässt sich die Lebensdauer des μ bestimmen (Umrechnung von Binnummer zu Sekunden gemäss Kap. 5.2); sie beträgt

$$\tau_{\mu} = (2.0474 \pm 0.0003) \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Damit beträgt die Abweichung vom heute akzeptierten Wert ca. 7% ($t_{\mu(\text{Literatur})} = 2.19703 \pm 0.00004$). Der angegebene Fehler ist nur der statistische Fehler; der systematische Fehler beruht v.a. auf der Annahme des konstanten Hintergrunds (diese Annahme ist physikalisch nicht korrekt) und dürfte um einiges grösser sein. Es ist allerdings sehr schwierig, ohne Kontrollmessungen über längere Zeit den systematischen Fehler zu beziffern.

Das TDC-Spektrum für grosse Energien ($E > \text{Michelkante}$)

Hier hat man sehr viel weniger Ereignisse als vorhin; der Anteil derer, die von direkten Elektronen kommen, ist dafür viel grösser. Fügt man zum Untergrund, zur Gaussfunktion für prompte Elektronen und zum exponentiellen Anstieg durch π - μ -Ereignisse (inzwischen kann die oben berechnete μ -Lebensdauer verwendet werden) nun noch einen exponentiellen Zerfall für die direkten Elektronen

$$N = c_{BG} + \left[c_{\pi\mu e} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-c_{\pi}}{\tau_{\pi}}} \right) \cdot e^{-\frac{t-c_{\pi}}{\tau_{\mu}}} \right] + \left[c_{G\text{-ampl}} \cdot e^{-\frac{((t-c_{\pi})-c_{G\text{-center}})^2}{2 \cdot c_{G\text{-width}}^2}} \right] + \left[c_{\pi e} \cdot e^{-\frac{t-c_{\pi}}{\tau_{\pi}}} \right] \quad (2)$$

ein, so kann man die Lebensdauer der π genauer fitten und daraus berechnen. Obige Formel setzt sich zusammen aus den Termen für die Signale 1-4 (wie beim TDC-Fit für kleine Energien) und dem Term für den direkten π -e-Zerfall.



*Fig. 5.4.3: TDC-Spektrum für Ereignisse grosser Energie.
($E > \text{Michelkante}$)*

In Fig.5.4.3 ist der entsprechende Fit schon eingezeichnet. Dieser ergibt:

$$\begin{aligned}
 c_{\text{BG}} &= 9.4007 \pm 1.3116 \\
 c_{\text{Ampl}} &= 16.062 \pm 1.6897 \\
 c_{\pi\text{-stop}} &= 117.93 \quad (\text{Fixed}) \\
 \tau_{\pi} &= 28.711 \pm 1.4454 \\
 \tau_{\mu} &= 1927.9 \quad (\text{Fixed}) \\
 \chi^2 &= 2.67 / 292 \quad \text{NDF}
 \end{aligned}$$

Diese Werte sind wie oben in Einheiten von Bins bzw. Events. Und die Fehler ebenfalls wie oben nur statistisch. Die Lebensdauer der π beträgt demnach (wiederum gemäss Umrechnung in Sekunden)

$$\tau_{\pi} = (3.05 \pm 0.15) \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Die Abweichung vom heute akzeptierten Wert beträgt ca.17% ($t_{\pi(\text{Literatur})} = 2.6033 \pm 0.0005$); man muss dazu noch bemerken, dass die Statistik wesentlich schlechter ist bei hohen Energien, da man hier viel weniger Ereignisse zur Verfügung hat. Hier zeigt sich wieder, dass der systematische Fehler um einiges grösser sein muss als der statistische; er ist aber ebenso aus den oben erwähnten Gründen nicht genau zu beziffern.

5.5 Bestimmung von R

Nachdem wir die Spektren der verschiedenen Runs addiert hatten, mussten wir gemäss (1) aus Kap. 2 zwei Cuts machen, und zwar für eine frühe und eine späte Zeit. Wir wählten unsere beiden Zeitfenster 40ns lang und mit 136ns Abstand voneinander. Wir machten zusätzlich einen Cut für sehr frühe Zeiten. Dies ergab unseren Background und der wurde von den anderen beiden Zeitfenstern subtrahiert. Wir sind uns der Tatsache bewusst, dass wir bei der Annahme, dass der Background zeitlich konstant ist, einen (nicht bezifferbaren) Fehler machen, da es sich hauptsächlich um μ handelt, die sich bereits vor dem π -Stop im Target befunden haben. Die beiden resultierenden Spektren sind in Fig. 5.5.1 gezeigt:

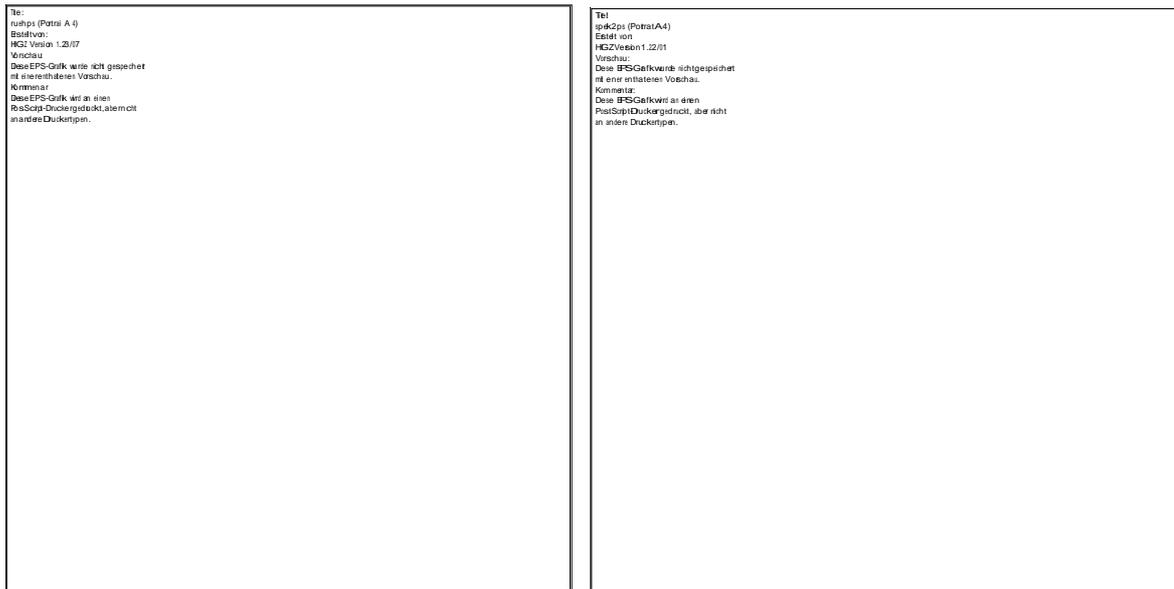


Fig. 5.5.1: Frühes und spätes Energiespektrum

Der π -e Positronpeak im frühen Spektrum ist gut sichtbar (um Binnnummer 4500). Der Peak bei ca. Binnnummer 300 entspricht nicht dem theoretischen Verlauf des Michelspektrums, es ist viel eher Untergrund bzw. Rauschen des NaI-Detektors, welches durch die Schwelle des Diskriminators links abgeschnitten ist. Die Spektren wurden nun jedoch nicht — wie erforderlich — mit der Faltung des Michelspektrums mit der Auflösungsfunktion des Detektors gefittet, da dieser Fit numerisch sehr aufwendig durchzuführen wäre, sondern es wurde für den Fit des Myonanteils eine empirische Funktion verwendet, welche Bryman [Bry86] ebenfalls verwendet hat, nämlich

$$f(x) = \frac{p_1 (3x^2 - 2x^3)}{(1 + e^{\frac{x-p_2}{p_3}})} \quad \text{wobei} \quad x = \frac{E}{E_{\max}} = \frac{2E}{m_\mu} \quad (3)$$

Dies entspricht einem Michelspektrum multipliziert mit einer Fermifunktion, welche die Michelkante (p_2) verschmiert. Der Fit-Parameter p_3 ist proportional zur Breite der Auflösungsfunktion [Bry86], wobei p_1 ein nicht weiter bedeutender proportioneller

Parameter bedeutet. Mit diesem Fit erhielten wir:

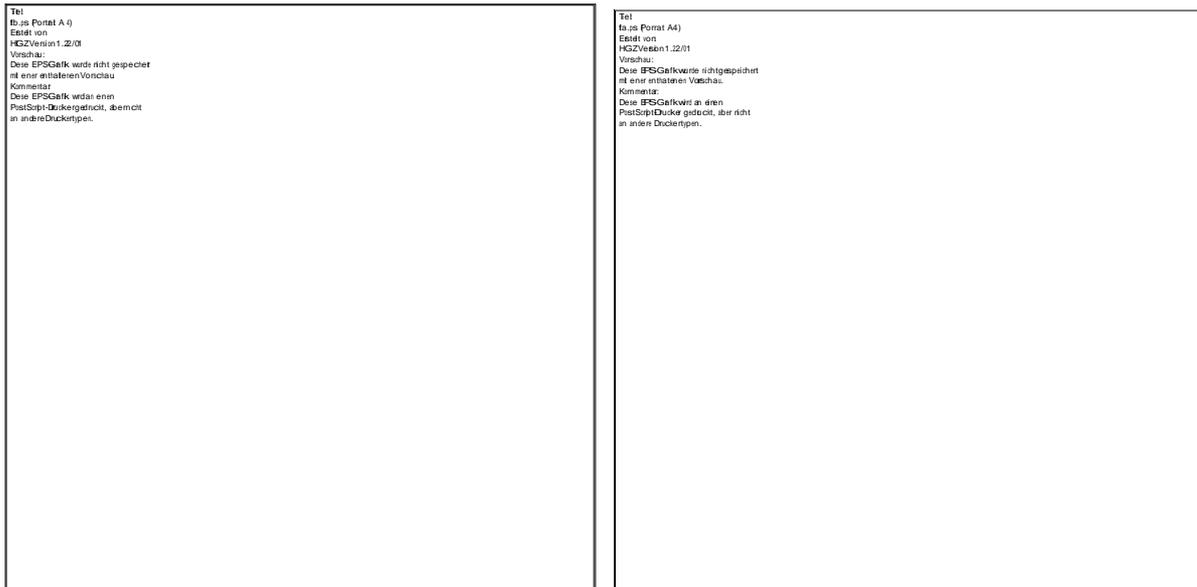


Fig. 5.5.2: Spektren mit Fits

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 1441.4 \pm 5.7 \\
 p_2 &= 1.390 \pm 0.005 \\
 p_3 &= 0.0319 \pm 0.0009 \\
 \chi^2 &= 1.8 / 76 \text{ NDF}
 \end{aligned}$$

und für den späten:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 2497.7 \pm 7.1 \\
 p_2 &= 1.400 \pm 0.004 \\
 p_3 &= 0.0300 \pm 0.0009 \\
 \chi^2 &= 1.4 / 76 \text{ NDF}
 \end{aligned}$$

Als interessanter Vergleich zwischen Fit und empirischen Daten ergibt sich (unter Vernachlässigung der Energieabhängigkeit der Auflösungsfunktion) folgender Vergleich :

$$\Delta E_{\text{Michelfitkante}} = E_{\text{max}} \cdot P_2 = 54 \text{ MeV} \cdot 0.03 = 1.5 \text{ MeV}$$

$$\Delta E_{\text{Auflösungsfunktion}} = \sigma_{\text{Gaussfit d. Auflösungsfkt.}} \cdot 50 \text{ MeV} / 450 \text{ Bins} = 9 \cdot 50 / 450 = 1.0 \text{ MeV}$$

Diese Resultate liegen in der selben Grössenordnung. Die Integration ergab nun folgende Werte:

$$N_{\mu e} = 146000 \pm 1100$$

$$D = 256500 \pm 500$$

Wobei $N_{\mu e}$ die Anzahl μ -e-Zerfälle im frühen und D die Summe der μ -e- bzw. π -e-Zerfälle im späten Zeitfenster darstellen. Die Grössen $N_{\mu e}$ und D bestimmten wir durch Integration der Fitfunktion von Bin 0 bis 2200 und direktes Auszählen der Spektren zwischen Bin 2200 und 3600, wobei $N_{\mu e}$ und D durch

$$R = \frac{\lambda_{\mu}}{\lambda_{\pi} - \lambda_{\mu}} \cdot \frac{N_{\pi e}}{D \cdot e^{\lambda_{\mu} \cdot t_s} - N_{\mu e}} \cdot \left[1 - e^{-(\lambda_{\pi} - \lambda_{\mu}) \cdot t_s} \right] \quad (4)$$

definiert sind (s. Kap. 2 Formel (20) und Anhang A). Den π -e Elektronpeak mussten wir gleich fitten wie die Auflösungsfunktion des Detektors. Wir sehen in Fig. 5.5.3 die Auflösungsfunktion des NaI-Detektors bei einer Strahlenergie von 50MeV.

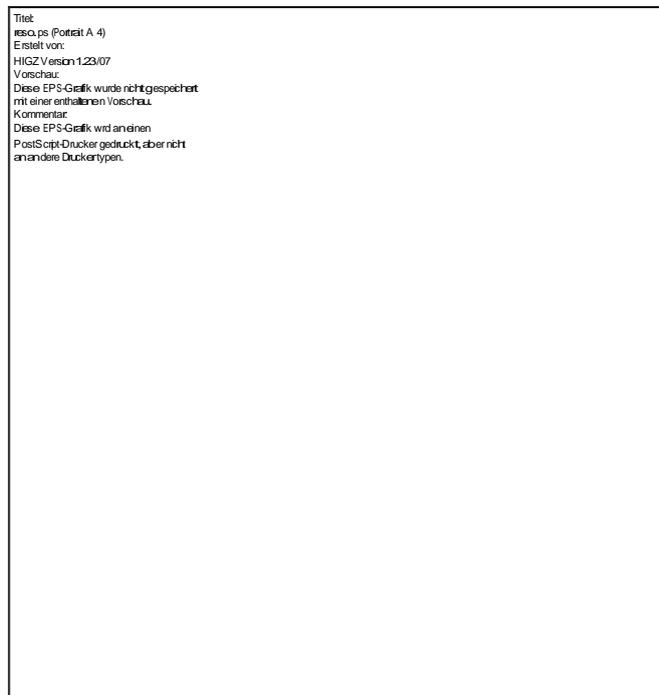


Fig. 5.5.3: Auflösungsfunktion des Detektors

Die rechte Seite fitten wir als Gaussfunktion und die linke als Polynom 3. Grades. Eine Exponentialfunktion auf der linken Seite würde den Fit zwar auch erfüllen, diese liefert aufgrund der schlechten Statistik (insgesamt hatten wir ca. 1000 direkte Elektronen) wesentlich grössere Fehler, da einer der Fit-Parameter im Exponenten steht und sich der Fehler dort gravierender auswirkt, als in einem Polynom. Wir fitten keinen Untergrund dazu, weil wir keine Funktion finden konnten, welche die Kurve, der μ -e (im späten Zeit-Cut) oberhalb der Michelkante, gut fittet. Die einzige Alternative wäre die Subtraktion des späten vom frühen Spektrum (s. auch 2. Auswertungsmethode)

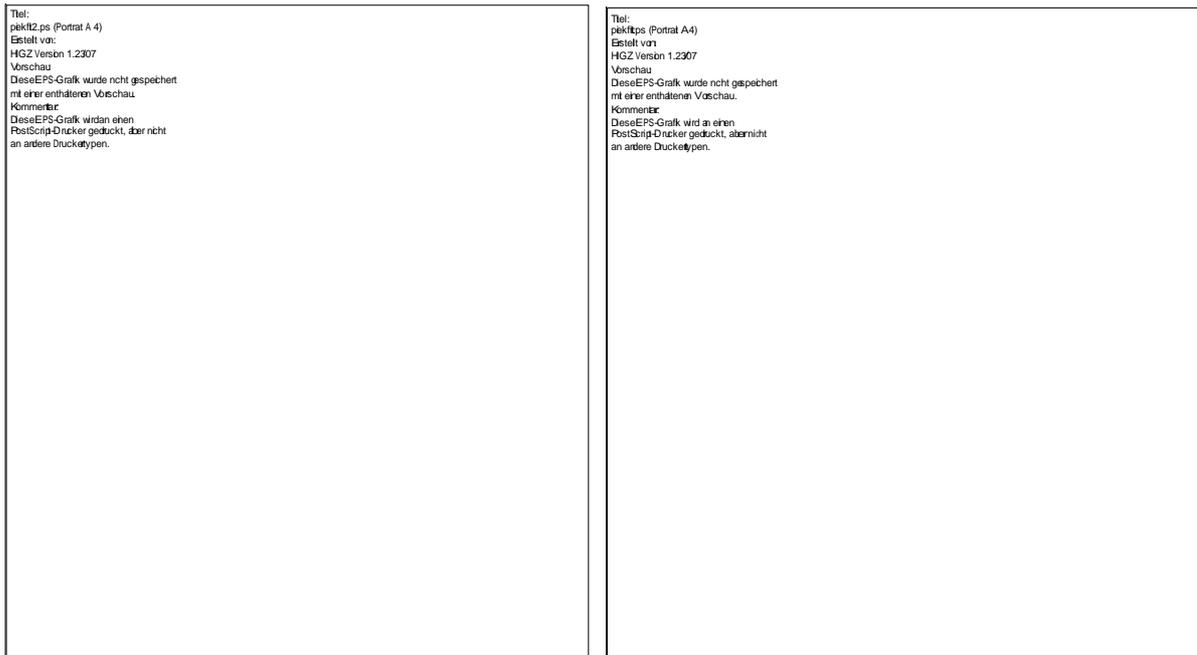


Fig. 5.5.4: Elektronpeak und Fit

Gauss :

$$\text{const} = 41.548 \pm 2.103$$

$$\text{mean} = 4482 \pm 21$$

$$\sigma = 151.62 \pm 13$$

$$\chi^2 = 1.0/21 \text{ NDF}$$

$$P_3(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + a_3 * x^3$$

(x = Binnummer)

$$a_0 = -4415 \pm 8$$

$$a_1 = 3.323 \pm 0.003$$

$$a_2 = (-8.38 \pm 0.006) \cdot 10^{-2}$$

$$a_3 = (7.1 \pm 0.1) \cdot 10^{-6}$$

$$\chi^2 = 1.0/33 \text{ NDF}$$

Das Integral über den letzten Fit liefert die Anzahl direkter Elektronen. Für die untere Integrationsgrenze wählten wir 3900. Dies ist ein Kompromiss zwischen zwei gegensätzlichen Fehlerverhalten:

1. Für kleine untere Grenzen riskiert man μ des auslaufenden Michelspektrums mitzuzählen.
2. Für grosse untere Grenzen riskiert man direkte Elektronen zu unterschlagen.

Unsere untere Grenze wurde so gewählt, dass wir ca. 7% der direkten Elektronen unterschlagen hatten, gleichzeitig war der Myonuntergrund dort bereits klein. Durch die von uns gewählte untere Integrationsgrenze wurde ein beträchtlicher Teil des "tiefenergetischen" Spektrums abgeschnitten. Ein Vergleich mit der Auflösungsfunktion liess uns den unterschlagenen Teil auf ca. 7% festlegen, welche wir zum erhaltenen $N_{\pi e}$ dazuzählten. Schliesslich erhalten wir:

$$N_{\pi e} = 1215 \pm 93$$

und hieraus unser eigentliches Resultat:

$$R = (1.14 \pm 0.07) \cdot 10^{-4}$$

Zweite Methode zur Berechnung von R:

Eine weitere und einfachere Methode R zu bestimmen ist die folgende: Wir verwenden wiederum die beiden Zeitfenster, wie bei der ersten Auswertung und die Formel (1) aus Kap. 2 aber diesmal ermitteln wir $N_{\pi e}$, $N_{\mu e}$ und D ohne Fits.

Im frühen Zeitfenster wurden bis Bin 3900 alle Events gezählt — d.h. die π -e wurden nicht mitberücksichtigt — und daraus erhielten wir $N_{\pi e}$. Dann wurden alle Events im späten Zeitfenster gezählt, um D zu erhalten. Das Spektrum im späten Zeitfenster wurde nun mit dem Faktor $N_{\mu e}/D$ multipliziert. Dieses erhaltene Spektrum konnte nun vom Spektrum des ersten Zeitfensters subtrahiert werden, was nach dem Integrieren des vorliegenden Spektrums $N_{\pi e}$ ergab. Die aus diesem Prozedere ermittelten Werte ergaben, eingesetzt in die Formel:

$$R = 1.09 \cdot 10^{-4}$$

Dieses Resultat erstaunt, wenn man bedenkt, wie einfach wir es erhalten haben. Wir unterlassen hier eine Fehlerangabe, wohlwissend, dass der Fehler sicher grösser als derjenige der ersten Methode ist, wegen grösseren Fehlern auf $N_{\mu e}$ und D.

5.6 Fehlerbetrachtung

Im folgenden betrachten wir ausschliesslich den statistischen Fehler. Die exakte Fehlerrechnung zeigt, dass der grösste Beitrag aus dem Fehler auf $N_{\pi e}$ entsteht, weil dort die Statistik am schlechtesten ist. Eine Variation der erhaltenen Fit-Parameter um ein σ zeigt, dass:

Grösse	Wert	prozentualer Fehler
τ_{π}	$(2.6033 \pm 0.0005) \cdot 10^8 \text{s}$	0.0%
τ_{μ}	$(2.19700 \pm 0.00004) \cdot 10^8 \text{s}$	0.0%
$N_{\pi e}$	$(2.43 \pm 0.16) \cdot 10^4$	6.5%
$N_{\mu e}$	$(2.92 \pm 0.01) \cdot 10^6$	0.3%
D	$(5.13 \pm 0.01) \cdot 10^6$	0.2%
t_s	$(1.36 \pm 0.01) \cdot 10^{-7} \text{s}$	0.7%
R	$(1.1427 \pm 0.075) \cdot 10^{-4}$	6.6%

5.7 Diskussion und Abschätzung des systematischen Fehlers

Wir haben mit unserem Experiment einen Wert für R erhalten, welcher vom heutigen Literaturwert [PD98] von $R = (1.230 \pm 0.004) \cdot 10^4$ um weniger als 10% abweicht. Unser Resultat ist — gemessen am Aufwand — erstaunlich gut. Da unser Wert aber zu tief ist, müssen wir an dieser Stelle auch mögliche systematische Fehlerquellen erwähnen.

- Wir haben zwar im Ganzen über 7 Millionen Events in unseren Messungen erfasst, doch für genauere Resultate brauchen wir viel mehr Ereignisse; wir müssen also länger messen. Bei 7 Millionen Events erwartet man etwa 1000 π -e-Zerfälle. Diese werden teilweise noch überlagert durch Untergrund und dem Ausläufer des Michelspektrums. Dadurch wird ein Fit des e-Peaks erschwert, und es entstehen Fehler.
- Der Untergrund kann auch unsere Resultate beeinflussen. Wir kennen den Untergrund nicht genau, wir können nur Vermutungen darüber anstellen. Ist er konstant? Nimmt er exponentiell ab?
- Wie zuverlässig und präzise waren eigentlich Hardware und Detektoren? Könnte man durch Ändern gewisser Parameter (z.B. Diskriminatorschwelle, Delays, usw.) die Messung verbessern?

Um Antworten auf einige dieser Fragen zu finden, müsste man das Experiment wieder aufbauen, Änderungen vornehmen und die Messungen sofort auswerten. Dadurch könnte das Experiment kontinuierlich verbessert werden. Als einzig mögliche Abschätzung des systematischen Fehlers geben wir hier den Fehler der Lebensdauern von μ und π an, nämlich wie bereits erwähnt 17%. Damit erhalten wir als Schlussresultat:

$$\mathbf{R = (1.14 \pm 0.21) \cdot 10^4}$$

Womit unser Resultat mit dem heute gültigen Literaturwert gut vereinbar ist.

5.8 Dank

Für uns Studenten war das Experiment am PSI ein ganz besonderes Erlebnis. Wir haben einen Einblick erhalten in die grosse Welt der Teilchenphysik und viel dabei gelernt. Wir möchten an dieser Stelle allen Personen — auch wenn sie nicht namentlich erwähnt sind — danken dafür, dass sie uns dieses Praktikum ermöglicht haben.

Anhang A

Herleitung der Gleichung (20) in Kap. 2

Die Anzahl der πe -Positronen (direkter Zerfall des Pions in ein Positron), welche in einem Zeitfenster der Länge t , das zur Zeit t_0 nach dem Pionstop beginnt, ist durch folgende Beziehungen gegeben:

$$N_{\pi e} = N_{\pi e}(t_0) - N_{\pi e}(t_0 + \tau) \quad (\text{A1})$$

$$N_{\pi e} = RN_{\pi}\Omega e^{-\lambda_{\mu}t_0} (1 - e^{-\lambda_{\pi}\tau}) \quad (\text{A2})$$

Wobei R für das gesuchte Verzweigungsverhältnis, N_{π} für Zahl der Pionen, Ω für den Raumwinkel und λ_{π} für die Zerfallrate des Pions steht. Die Anzahl der Pion-Myon-Zerfalls-Positronen im selben Zeitfenster ist mit folgender Beziehung gegeben:

$$N_{\pi\mu e} = N_{\pi}\Omega \frac{\lambda_{\pi}\lambda_{\mu}}{\lambda_{\pi} - \lambda_{\mu}} \left\{ (1+f) \frac{e^{-\lambda_{\mu}t_0}}{\lambda_{\mu}} (1 - e^{-\lambda_{\mu}\tau}) - \frac{e^{-\lambda_{\pi}t_0}}{\lambda_{\pi}} (1 - e^{-\lambda_{\pi}\tau}) \right\} \quad (\text{A3})$$

Hier ist λ_{μ} die Myonenzerfallsrate und f erlaubt eine Korrektur der Myonenkontamination des Pionstrahl (Pionzerfall!). Beinahe gleich wie der Ausdruck (A3) sieht die Beziehung für die aufgetretenen Zerfälle im zweiten Zeitfenster aus, das t_s nach dem ersten Fenster aufgeht.

$$D = N_{\pi}\Omega \frac{\lambda_{\pi}\lambda_{\mu}}{\lambda_{\pi} - \lambda_{\mu}} \left\{ (1+f) \frac{e^{-\lambda_{\mu}(t_s+t_0)}}{\lambda_{\mu}} (1 - e^{-\lambda_{\mu}\tau}) - \frac{e^{-\lambda_{\pi}(t_s+t_0)}}{\lambda_{\pi}} (1 - e^{-\lambda_{\pi}\tau}) \right\} \quad (\text{A4})$$

Nun kann man neue Variablen definieren:

$$A = N_{\pi}\Omega \frac{\lambda_{\mu}}{\lambda_{\pi} - \lambda_{\mu}} e^{-\lambda_{\pi}t_0} (1 - e^{-\lambda_{\pi}\tau}) \quad (\text{A5})$$

$$B = N_{\pi}\Omega (1+f) \frac{\lambda_{\pi}}{\lambda_{\pi} - \lambda_{\mu}} e^{-\lambda_{\mu}t_0} (1 - e^{-\lambda_{\pi}\tau}) \quad (\text{A6})$$

Mit diesen neuen Variablen ergeben sich folgende Beziehungen

$$N_{\pi\mu e} = B - A \quad (\text{A7})$$

$$D = (e^{-\lambda_{\mu}t_s})B - (e^{-\lambda_{\pi}t_s})A \quad (\text{A8})$$

$$N_{\pi e} = R \left(\frac{\lambda_{\pi} - \lambda_{\mu}}{\lambda_{\mu}} \right) A \quad (\text{A9})$$

Die Gleichung (A8) kann gelöst werden, wenn (A9) eingesetzt wird. Die Lösung sieht folgendermassen aus:

$$R = \frac{\lambda_{\mu}}{\lambda_{\pi} - \lambda_{\mu}} \frac{N_{\pi e}}{De^{\lambda_{\mu} t_s} - N_{\pi \mu e}} (1 - e^{-(\lambda_{\pi} - \lambda_{\mu}) t_s}) \quad (\text{A10})$$

Dies ist nun die für unsere Versuchsauswertung sehr wichtige Formel, die von Di Capua et al. [DiC64] angeführt worden ist.

Literaturhinweise

- [DiC63] Di Capua et al. „Measurement of...“, Phys. Rev. 1963
- [Bry86] Bryman et al. „Measurement of...“, Phys. Rev. Letters 1986
- [RuF49] Ruderman und Finkelstein, 1949
- [And60]