Problem:

$$x(t+h) = x(t) - \alpha \cdot h \cdot x(t)$$

$$\dot{x}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = -\alpha \cdot x(t) \quad \textit{lineare DGL erster Ordnung}$$

$$\textit{also } x(t) = x_0 \cdot e^{-\alpha t}, \quad \textit{wobei } x_0 = x(0) \quad \textit{exponentielle Abnahme der Konzentration}$$

$$> x(1) = 97.045$$

$$> x(10) = 74.081$$

$$> x(100) = 4.979$$

---

1. Ansatz:

$$x(t+h) = x(t) \cdot [1 - h\alpha]$$

$$x(h) = x(0) \cdot [1 - h\alpha] \quad \textit{lineare Abnahme der Konzentration.}$$

$$> x(1) = 97.000 \quad (\Delta = 0.05\%)$$

$$> x(10) = 70.000 \quad (\Delta = 5.50\%)$$

$$> x(100) = -200.000 \quad \textit{Unsinn!!!}$$

---

2. Ansatz:

$$x(t+h) = x(t) \cdot [1 - h\alpha]$$

$$x(h) = x(h-1) \cdot [1-\alpha] = \{x(h-2) \cdot [1-\alpha]\} \cdot \{1-\alpha\} \quad \textit{usw...}$$

$$x(h) = x_0 \cdot [1-\alpha]^h \quad \textit{polynomielle Abnahme der Konzentration}$$

$$> x(1) = 97.000 \quad (\Delta = 0.05\%)$$

$$> x(10) = 73.742 \quad (\Delta = 0.46\%)$$

$$> x(100) = 4.755 \quad (\Delta = 4.50\%)$$

Begründung der beinahe-Übereinstimmung:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \textit{also hier} \quad e^{-\alpha h} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\alpha h}{n}\right)^n \cong (1-\alpha)^h \quad \textit{für } \alpha \to 0,\ h \to 0$$

$$\textit{Sei nämlich } \alpha = 1, \textit{ dann} \quad \left[e^{-\alpha h} - (1-\alpha)^h\right] = e^{-h} = \begin{Bmatrix} 0.368 & (h=1) \\ 4.540 \cdot 10^{-5} & (h=10) \\ 3.720 \cdot 10^{-44} & (h=100) \end{Bmatrix}$$